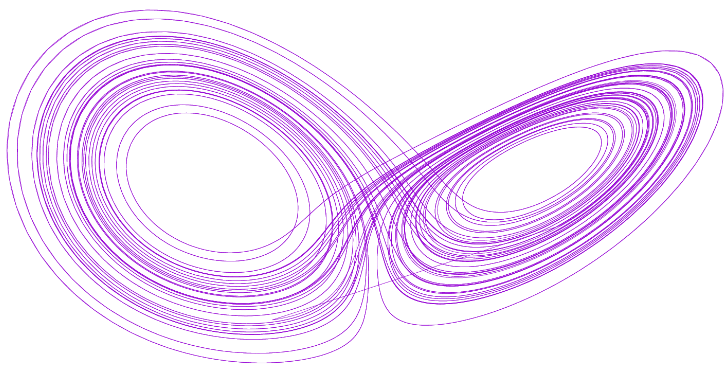
Differenciálegyenletek

Környezettan BSc. hallgatók számára

ELTE TTK



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **5**

1.1. Ismétlés, áttekintés . . . 7

1.1.1. Határérték . . . 7

1.1.2. Differenciálszámítás . . . 8

1.1.3. Integrálszámítás . . . 10

2. Közönséges differenciálegyenletek **13**

2.1. Alapfogalmak . . . 13

2.1.1. Differenciálegyenlet fogalma, osztályozása, megoldása . . . 13

2.2. Elsőrendű differenciálegyenletek . . . 17

2.2.1. Explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletek . . . 17

2.2.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek . . . 18

2.2.3. Egzakt differenciálegyenletek . . . 19

2.2.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek . . . 22

2.3. Másodrendű differenciálegyenletek . . . 29

2.3.1. Hiányos másodrendű diffegyenletek, $y'' = f(x)$ alakú diffegyenletek . . . 29

2.3.2. Hiányos másodrendű diffegyenletek, $F(x, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletek . 30

2.3.3. Hiányos másodrendű diffegyenletek, $F(y, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletek . 33

2.3.4. Állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek 34

2.3.5. Állandó együtthatós, inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek. A próbafüggvény módszere . . . 37

3. Parciális differenciálegyenletek **41**

3.0.1. A rezgő húr egyenlete . . . 41

3.0.2. A hővezetés egyenlete . . . 47

4. Kidolgozott szöveges példák **51**

4.1. Populációdinamikai modellek . . . 51

4.1.1. Normális szaporodás egyenlete . . . 51

4.1.2. A robbanás egyenlete . . . 52

4.1.3. Logisztikus megoldás . . . 52

4.1.4. Halászati kvóta . . . 52

4.1.5. Halászat relatív kvótával . . . 53

4.1.6. Lotka–Volterra-modell . . . 53

4.2. A légkör egyensúlya és a Brunt–Väisälä-frekvencia . . . 54

4.2.1. A légkör egyensúlyi rétegzettsége . . . 54

4.2.2. Brunt–Väisälä-frekvencia 54
4.3. Egyszerűbb szöveges példák 55
4.3.1. Tartályból kifolyó víz 55
4.3.2. Tölcsérben kifolyó víz 56
4.3.3. Egyenletes kifolyás tartályból 57
4.3.4. Gömb mozgása súrlódó folyadékban 57
4.3.5. Oldat hígítása 58
4.3.6. A kemencéből kivett kenyér hűlése 58
4.3.7. A radioaktív bomlás 58
4.3.8. Párolgás 59
4.3.9. Töltések mozgása 60
4.3.10. Sótömb oldódása 60
4.4. Szabadesés 61
4.5. Rezgőmozgás 63
4.5.1. Utazás a Föld középpontja felé ... és vissza 63
4.5.2. Gravitációs metró 65
4.6. Rezgő húr 65
4.6.1. Alaprezgés és felharmonikusok 65

1. fejezet

Bevezetés

A differenciálegyenleteknek minden természettudomány egzaktan tárgyalható területén hangsúlyos szerep jut. A természettörvények mindig egy mennyiség időbeli változását kötik össze más mennyiségekkel és/vagy azok valamilyen mennyiség szerinti változásával. Maga a Newton-egyenlet is differenciálegyenlet, melynek minél általánosabb helyzetben történő felírása és megoldása a matematikusokat és fizikusokat a matematikai apparátus magas szintre fejlesztésére sarkallta. A variációs elvek alkalmazásával nem csak a közönséges, de a parciális differenciálegyenletek elmélete is nagy mélységekig kidolgozásra került. A jegyzet ebből a mérhetetlen anyagból igyekszik egy olyan csipetet kiragadni, mely az alkalmazásban fontos lehet egy nem feltétlenül matematikai érdeklődésű hallgatónak (is).

A jegyzet felépítése igyekszik alkalmazkodni a célközönséghez. Annak ellenére, hogy a korábbi kurzusokon megtanultak, mint az integrál- és differenciálszámítás e kurzus során elvárt tudás, használt eszköz, a jegyzet írója jónak látta egy rövid összefoglalóval kezdeni, melynek során a legfontosabb fogalmakat összegyűjti. Továbbá felhívja a figyelmet messzemenően jobb munkákra, melyek a felkészülést (és nem letagadható módon a jegyzet megszületését is) nagyban segítik. Ilyenek az alábbiak:

- Obádovics: Matematika, Műszaki könyvkiadó
- Obádovics: Felsőbb matematika, Műszaki könyvkiadó
- Bolyai sorozat:
  - Urbán János: Határértékszámítás
  - Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
  - Bárczy Barnabás: Integrálszámítás
  - Scharnitzky Viktor Differenciálegyenletek
- Bronstejn–Szemengyajev: Matematikai kézikönyv/zsebkönyv

Utóbbi igen tekintélyes mennyiségű integrálformulát tartalmaz.

Bár a jegyzet valóban feltételez némi matematikai előtanulmányt, a részletes számolások elősegítik a megértést akkor is, ha az Olvasó esetleg elfelejtette volna a részleteket. Azonban a matematikai érzék és hozzáállás fontos, mely sok példa részletes megoldásával és megértésével fejleszthető. Erre a bevezető fejezetben, illetve az ajánlott irodalomban található feladatok szolgálnak. A jegyzet alapvetően gyakorlati szempontok figyelembevételével íródott/íródik. Ezt a nézetet igyekszik támogatni a jegyzet végén található feladatgyűjtemény, mely kidolgozott példákkal segíti a megértést, az adott probléma formalizálását és az egyenletek megoldási módszerének szemléltetését, kiemelt hangsúlyt fektetve a differenciálegyenletek széles körű alkalmazhatóságára és alkalmazottságára. Ezért nem csupán matematikai vagy fizikai példákon, hanem biológiából, meteorológiából vett feladatok is színesítik a palettát. Az „elméleti” bevezetők rövidsége is arra motivál, hogy az általános esetben kapott végképletet megértve a gyakorlati feladatmegoldás során alkalmazzuk azt.

1.1. Ismétlés, áttekintés

1.1.1. Határérték

Az $y = f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy *határértéke* (limesze) az $x \to a$ esetén A, ha az a-hoz közelítve az $f(x) - A$ különbség tetszőleges kicsinnyé válik, $f(x)$ értéke tetszőlegesen megközelíti A értékét. Pontosabban

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1.1}$$

ha akármilyen kis pozitív ϵ számhoz található olyan pozitív η szám, amelyre $|f(x) - A| < \epsilon$, valahányszor $|x - a| < \eta$.

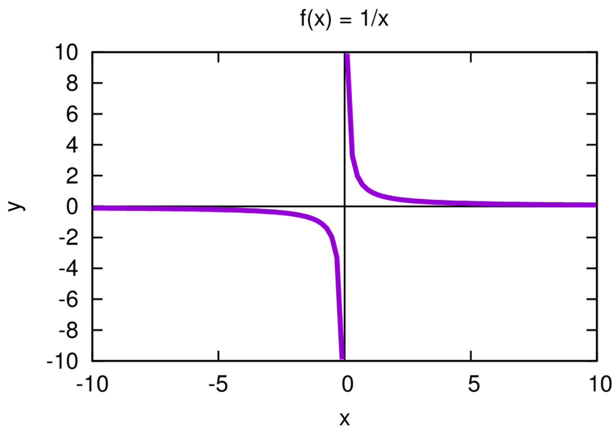
Beszélhetünk *bal- vagy jobboldali határértékekről* is, ha az a-tól balra vagy jobbra eső x értékekre szorítkozunk csupán. Ekkor a baloldali határértéket $x \to a - 0$, illetve a jobboldali határértéket $x \to a + 0$ jelöli.

Ha az $y = f(x)$ függvény értéke minden határon túl nő, akkor a függvényt az $x = a$ hely környezetében *végtelen nagynak* nevezzük. (A környezetet most nem definiáljuk, de a pont körüli nagyon kicsi tartományként gondolunk rá.) Előfordulhat az is, hogy a függvény határértékben felvett értéke minden határon túl csökken, azaz *végtelen kicsiny*.

Lássunk egy példát az előző két bekezdésre, az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt.

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{1.2}$$

Vagyis az $\frac{1}{x}$ olyan függvény, hogy a 0-ban a bal- és jobboldali határértéke más, de ugyanúgy nullához tart a ∞-ben, mint a $-\infty$-ben. Ez a viselkedés jól megfigyelhető a 1.1. ábrán.



1.1. ábra. Az $f(x) = 1/x$ függvény origóban vett határértéke különböző, ha pozitív és a negatív irányból.

A határérték kiszámítását konkrét esetekre segíti néhány szabály:

1. Az állandó határértéke önmaga:

$$\lim_{x \to \text{bárhova}} C = C \tag{1.3}$$

2. A véges tagból álló összeg határértéke egyenlő a tagok határértékeinek összegével:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x) - h(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} h(x) \tag{1.4}$$

3. A véges tagból álló szorzat határértéke egyenlő a tényezők határértékeinek szorzatával:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} h(x) \tag{1.5}$$

4. A hányados határértéke, ha az osztó határértéke nem nulla, az osztandó és az osztó határértékének hányadosával egyenlő:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \tag{1.6}$$

5. Rendőr-elv: Ha x értékét olyan intervallumból választjuk, amelyben $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ és $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1.7}$$

Gyakorló példák:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$
2. $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos(x)}{\cot(\frac{x}{4}}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (Ebben az esetben a rendőr-elv használható.)

1.1.2. Differenciálszámítás

A differenciálhányados és a határérték fogalma vezet el a differenciálhányados fogalmáig. Utóbbival az előző fejezetben foglalkoztunk, előbbivel kapcsolatban most teszünk néhány megjegyzést mielőtt a differenciálszámítással foglalkoznánk.

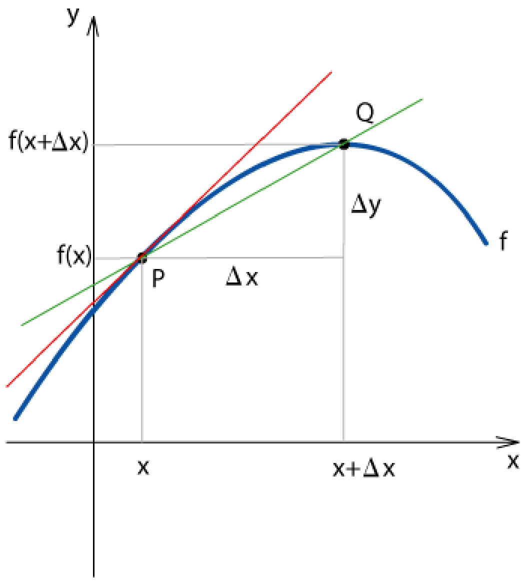
Egy függvény menetének vizsgálatához esetleg fontos lehet tudnunk, hogy a független változó (x) valamilyen megváltozásával a hozzátartozó függvényérték hogyan változik meg. Ennek vizsgálatára definiálhatjuk a *differenciahányados* fogalmát a következőképpen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{1.8}$$

Ha az f függvény differenciahányadosának az $x = a$ helyen létezik a $\Delta x \to$ határértéke, akkor ezt a határértéket a függvény a helyhez tartozó *differenciálhányadosának* (röviden deriváltjának) nevezzük:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x}. \tag{1.9}$$

Geometriai jelentést is tulajdoníthatunk a deriváltnak (ld. 1.2). Mivel a függvény szelője a $\Delta x \to 0$ határesetben az érintőbe megy át, a függvény a pontbeli deriváltját a függvény a abszcisszájú pontjában húzott érintő iránytangensével is azonosíthatjuk.



1.2. ábra. A differenciálhányados és szemléletes jelentése

Természetesen a gyakorlatban nem a határérték definíciójával számoljuk ki egy függvény deriváltját. Ez már egy egyszerűbb összetett függvény esetén is bonyolult feladatnak bizonyulhat. Léteznek alapvető differenciálási szabályok, melyek ismeretében nagyon sok függvény deriváltja kiszámítható [1].

Differenciálási szabályok:

1. $y = f(x) = \text{const.} \rightarrow y' = 0$
2. $y = cf(x) \rightarrow y' = cf'(x)$
3. $y = u(x) + v(x) \rightarrow y' = u'(x) + v'(x)$
4. $y = u(x) - v(x) \rightarrow y' = u'(x) - v'(x)$
5. $y = u(x)v(x) \rightarrow y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
6. $y = u(x)v(x)z(x) \rightarrow y' = u'(x)v(x)z(x) + u(x)v'(x)z(x) + u(x)v(x)z'(x)$
7. $y = \frac{u(x)}{y(x)} \rightarrow y' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
8. $y = f(u(x)) \rightarrow y' = f'(u(x))u'(x)$

Függvények és deriváltjaik:

Függvény	Deriváltja
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
a^x	$a^x \ln(a)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

1.1.3. Integrálszámítás

Határozatlan integrál: Valamely adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, melynek deriváltja az adott függvény. Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha deriváltja $f(x)$ [2]. Jelölés:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) \tag{1.10}$$

[1] Léteznek olyan függvények melyek, bár folytonosak, mégsem deriválhatók egyetlen pontban sem, például a Weierstrass-függvény https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function

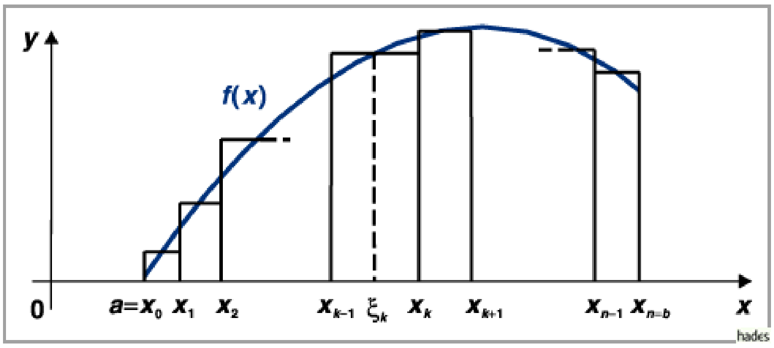
[2] Sok definíciót nem bonyolítunk azzal, hogy külön kikötjük, de minden elmondott csak egy tartományra felírva érvényes. Azonban ez a tartomány lehet az egész értelmezési tartomány is.

Ha $F(x)$ primitív függvény, akkor $F(x) + C$ is. Itt jegyezzük meg, hogy ezzel a C integrálási konstanssal külön foglalkozni kell majd a differenciálegyenlet megoldása során. Ha egy fizikai probléma megoldása $F(x) + C$, akkor C-nek valahogy rögzítettnek kell lennie.

Határozott integrál: Legyen adott az $f(x)$ függvény, amely egy $[a, b]$ zárt intervallumon mindenütt értelmezett. Az $f(x)$ függvény a-tól b-ig vett határozott integráljának a következő számot nevezzük:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.11}$$

ahol az $F(a), F(b)$ a primitív függvény a-ban, illetve b-ben felvett értékét jelöli. A (1.11) szabályt, Newton–Leibnitz-szabálynak nevezik. Ez tulajdonképpen a görbe alatti területet jelenti.



1.3. ábra. A Newton–Leibnitz-szabály szemléletes jelentése.

Néhány alapintegrál:

Függvény	Integrálja
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$\cot(x)$	$-\ln(\sin(x))$
$\frac{1}{\cos^{(} x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\log_a(x)$	$\frac{x(\log_a(x)-1)}{\ln(a)}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\coth(x))$
$\coth(x)$	$\ln(\tanh(x))$
$\frac{1}{\coth^2(x)}$	$\tanh(x)$
$\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\coth(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{atanh}(x)$

1.1. táblázat. nNéhány alapintegrál. Egy igen tekintélyes integráltáblázat található a *Bronstejn–Szemengyajev: Matematikai kézikönyv* c. könyvben.

2. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

2.1. Alapfogalmak

2.1.1. Differenciálegyenlet fogalma, osztályozása, megoldása

Differenciálegyenletnek nevezünk minden olyan egyenletet amelyben deriváltak szerepelnek. Ez a meghatározás nem teszi világosabbá a témát, de ha elképzeljük, hogy egy egyenletben szerepel*het* egy függvény, annak deriváltja, konstansok, független változók, talán egy kicsit jobb képet kapunk. Attól függően, hogy a felsoroltak közül milyen tagok szerepelnek az egyenletben, a differenciálegyenletek több, kisebb-nagyobb csoportba sorolhatóak. Ezek szerint is több szempontot vehetünk figyelembe, melyek a megoldás menetében, a módszerek megválasztásában fontosak lehetnek.

Ezeket a besorolást segítő alapfogalmakat tekintjük most át:

1. Ha a függvény, amelynek a deriváltjai az egyenletben szerepelnek egyváltozós, vagy csak az egyik változó szerinti deriváltakat tartalmazza (pontosabban egy független változót tartalmaz), közönséges deriváltakat tartalmaz így *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük
   Ha a függvény, amelynek deriváltja(i) szerepelnek a differenciálegyenletben többváltozós, előfordulhat, hogy más-más változó szerinti deriváltjai is szerepelnek az egyenletben. Gondoljunk csak a hővezetés egyenletére, a hullámegyenletre, a hidrodinamika egyenleteire vagy a Maxwell-egyenletekre. Ezeket az egyenleteket *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük, mert az egyenletekben parciális deriváltak szerepelnek.

2. A differenciálegyenlet rendje, a benne szereplő legmagasabb derivált rendszámával egyenlő. Egy olyan egyenlet tehát melyben második derivált a legmagasabb *másodrendű differenciálegyenletnek* nevezünk. Emlékeztetünk, hogy a Newton egyenlet épp egy ilyen másodrendű differenciálegyenlet:

$$\sum F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.1}$$

3. A közönséges differenciálegyenletek közül azokat, amelyekben az ismeretlen függvény és annak deriváltjai legfeljebb első hatványon szerepelnek *lineáris differenciálegyenletnek*,

azokat, melyekben második vagy magasabb hatvány is szerepel *nemlineáris differenciálegyenletnek* nevezzük.

4. Ha a közönséges differenciálegyenletben van olyan tag, amely állandó, vagy amelyben csak a független változó szerepel, akkor a differenciálegyenlet *inhomogén*, ha nincs akkor *homogén*.

5. Ha a közönséges differenciálegyenletben a függvényt és deriváltjait tartalmazó tagok együtthatói állandóak, akkor a differenciálegyenletet *állandó együtthatós differenciálegyenleteknek* nevezzük. Azon egyenletekben, melyekben az együtthatók nem állandók, *függvényegyütthatós differenciálegyenleteknek* nevezzük.

Példák:
Homogén elsőrendű diffegyenlet:

$$y' = 0 \tag{2.2}$$

Inhomogén elsőrendű diffegyenlet:

$$y' = 1 \tag{2.3}$$

Függvényegyütthatós inhomogéninhomogén elsőrendű diffegyenlet:

$$xy' = c \tag{2.4}$$

Nemlineáris függvényegyütthatós inhomogén másodrendű diffegyenlet:

$$(xy'')^2 = c \tag{2.5}$$

Elsőrendű parciális diffegyenlet:

$$y' = c\dot{y} \Longleftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = c\frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.6}$$

A differenciálegyenlet megoldásának mindazon függvényeket nevezzük, melyek deriváltjaikkal együtt behelyettesítve kielégítik az adott differenciálegyenletet. Mivel általában (de nem mindig) integrálással oldjuk meg a differenciálegyenletet a megoldást szokás úgy is nevezni, hogy a differenciálegyenlet integrálja. A megoldások lehetnek *általános megoldás*általánosak vagy *partikulárisak*, *regulárisak* vagy *szingulárisak*. Tekintsünk egy példát ezen fogalmakra:

$$y'' = 12x$$

másodrendű differenciálegyenlet megoldásának menete integrálással:

$$y'' = 12x \leftarrow y' = 6x^2 + A \leftarrow y = 2x^3 + Ax + B$$

(Bizonyítsuk be, hogy a talált megoldás, ténylegesen megoldja az egyenletet!) Az utolsó egyenletet, azaz az y-függvény paraméteres alakját nevezzük általános megoldásnak. Ebből csak egy van ellenben a partikuláris megoldással. A partikuláris megoldásra példa A és B bármely konkrét értékével felírt megoldás. (Természetesen ha a fenti megoldás általános A, B-re igaz, akkor konkrét értékekre is az lesz.) Általában (de nem mindig!) az általános megoldás tartalmazza az összes partikuláris megoldást. A mi példánkban egy általános megoldást találtunk és végtelen sok partikuláris megoldást (hisz A, B akármilyen értéket felvehet.

Természetesen ha ez a differenciálegyenlet egy konkrét folyamatot ír le, nem vagyunk elégedettek ha a talált megoldás akármilyen A, B-re teljesül, hisz egy természetben is lejátszódó folyamat lehet, hogy igaz $A = 10, B = 1$ esetén, de nem biztos, hogy igaz más paraméterértékekre.

A differenciálegyenlet partikuláris megoldásai közül az adott problémát leíró kiválasztásához feltételeket kell megadni az problémának megfelelően. Tekintsük a következő példát:

$$y'' = -y \tag{2.7}$$

(Erről az egyenletről még tanulunk, most csak a példa kedvéért hoztuk fel.) Az egyenlet általános megoldása

$$y = A\cos(x) + B\sin(x) \tag{2.8}$$

(Bizonyítsuk be, hogy tényleg megoldása az egyenletnek!) Látható, hogy a differenciálegyenlet a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha egy konkrét fizikai rendszerre írtuk fel, akkor az A, B paraméterek, melyek fizikai jelentése az amplitúdók, nem lehetnek tetszőlegesek. Így amikor egy differenciálegyenlettel foglalkozunk mindig meg kell adni ún. *kezdeti feltételeket.* A kezdeti feltételek segítenek abban, hogy a tetszőlegesnek megengedett paramétereket, melyek az általános megoldásban szerepelnek megszorítsuk konkrét értékekre és így kiválasszuk a nekünk ténylegesen szükséges, a mi problémánkat igazából leíró partikuláris megoldást. Mindig annyi feltételt kell megadnunk, ahányad rendű az egyenletünk, hogy a megoldás egyértelmű legyen, azaz ki tudjuk választani egyértelműen az egyik partikuláris megoldást.

Tekintsük a harmonikus rezgőmozgás egyenletét. A következő kezdeti feltételeket adjuk meg.

$$y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 0 \tag{2.9}$$

Mi következik ebből? Az első feltétel akkor teljesül, ha

$$2 = A\cos(0) + B\sin(0). \tag{2.10}$$

A második tag nulla, így az egyenlet az $A = 2$-t adja. Azaz a partikuláris megoldásunk az

$$y = 2\cos(x) + B\sin(x) \tag{2.11}$$

függvényre szűkült. Azonban a B-t még meg kell határoznunk. (Nagyon jegyezzük meg, hogy nem azért kell itt két kedzeti feltételt tenni, mert két ismeretlenünk van.) Erre a második feltételt használva:

$$y' = -2\sin(0) + B\cos(0) = 0. \tag{2.12}$$

Ez csak akkor teljesül, ha a $B = 0$. Így a kezdeti értékekkel összhangban levő partikuláris megoldásunk:

$$y = 2\cos(x). \tag{2.13}$$

A differenciálegyenlet megoldása akkor reguláris, ha az egyenletet és a megadott kedzeti feltételeket kielégíti. Ellenkező esetben szinguláris. Nekünk elég ennyi, a gyakorlaton minden megoldás reguláris lesz.

Gyakorló feladatok

1. Milyen differenciálegyenlet a következő:
   (a) $(y')^2 = x^2 + 4$
   (b) $y'' + 6y' - y = 3x^2$
   (c) $y'y'' = (y')\sin^2(x) + (y')^2\cos^2(x) - 1$
   (d) $y'' + 3y' + 4' = 0$
   (e) $y''' + 2y' + (y')^2 = e^{-xy'}$
2. Bizonyítsuk be, hogy a

$$y = C_1(3x+2)^2 + \frac{C_2}{(3x+2)^2} + \frac{1}{108}\left[(3x+2)^2\ln(3x+2) + 1\right] \tag{2.14}$$

   megoldása a

$$(3x+2)^2y''(9x+6)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1 \tag{2.15}$$

   differenciálegyenletnek.
3. Oldjuk meg a fejezetben szerepelt nem-megoldott kezdeti érték problémát! Milyen partikuláris megoldásokat kapunk, ha következő kedzeti feltételeket választjuk:
   (a) $y(0) = 10$, $y'(1) = 1$, $y_{part} =$
   (b) $y(2) = 1$, $y'(1) = 10$, $y_{part} =$
   (c) $y(-3) = 9$, $y'(7) = 3$, $y_{part} =$
   (d) $y(10) = 10$, $y'(1) = -1$, $y_{part} =$
   (e) $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y_{part} =$

2.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

Elsőrendű, y'-ben elsőfokú differenciálegyenletek általános alakja

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.16}$$

ahol $M(x,y)$ és $N(x,y)$ valamilyen tartományon értelmezett folytonos függvények, melyektől függően más-más módszereket alkalmazhatunk. Ebben az alfejezetben ilyenre látunk néhány példát!

Kitérőképpen megjegyezzük, hogy az elsőrendű differenciálegyenleteknek érdekes geometriai jelentés tulajdonítható. Egy

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.17}$$

explicit alakú differenciálegyenlet az (x_0, y_0) pontban egy irányt határoz meg. Ez az

$$m = \frac{dy}{dx}|_{(x_0,y_0)} = f(x_0, y_0) \tag{2.18}$$

irányhatározó (vö. a derivált szemléletes jelentése 1.2. ábra) ahhoz az integrálgörbéhez (megoldásgörbéhez) húzható érintő, amely áthalad az (x_0, y_0) ponton. Ezen irányok összességét iránymezőnek nevezzük. (Képzeljük el és rajzoljuk meg a $y' = 3x^2 + 2x$ diffegyenlet iránymezőjének néhány vektorát!)

2.2.1. Explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletek

Ha a (2.16) egyenlet rendezéssel a

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{,vagy} \quad \frac{dy}{dx} = g(y) \tag{2.19}$$

alakra hozható, kedzeti feltétel alakú elsőrendű diffegyenletről beszélünk. A diffegyenlet általános megoldása

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{,vagy} \quad x = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + c \tag{2.20}$$

Példák

1. Oldjuk meg a következő diffegyenletet: $y' = 2\sin(x)$.

   A megoldás az egyenlet mindkét oldalának integrálásával áll elő: $y = -2\cos(x) + c$

2. Keressük meg az $y' = \frac{1}{1+x}$ differenciálegyenlet azon partikuláris megoldását, mely áthalad a $P(0;1)$ ponton.

   Integrálva: $y = \ln|x+1| + \ln c$.
   A kedzeti feltétel azt jelenti, hogy ha $x = 0$ akkor $y = 1$, azaz $1 = \ln c \to c = e$. Így a keresett partikuláris megoldás: $y = \ln e|x+1| = \ln|x+1| + 1$.

Gyakorló példák

1. Oldjuk meg az $y'y^3 = 1$ differenciálegyenletet úgy, hogy ...
   (a) ... a kedzeti feltétel $y(1) = 3$.
   (b) ... meghatározzuk azt a partikuláris megoldást, mely átmegy a $P(3, 10)$ ponton.
   (c) ... határozzunk meg legalább egy olyan $y(a) = b$ kedzeti feltételt, melyhez nem tartozik partikuláris megoldás.

2.2.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Az

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.21}$$

elsőrendű differenciálegyenlet változói szétválaszthatók, ha az egyenlet felírható az

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{2.22}$$

alakban. Ugyanis, ha a $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, akkor ezzel osztva az egyenletet

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \tag{2.23}$$

egyenletre jutunk, amelyet más jelöléssel felírva

$$F(x)dx + G(y)dy = 0 \tag{2.24}$$

látható, hogy a változókat szétválasztottuk. A differenciálegyenlet általános megoldása így integrálással megadható:

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = C \tag{2.25}$$

Általában úgy érdemes a tagokat gyűjteni, hogy a két változó az egyenlet két oldalán szerepeljen. Azonban arra ügyelni kell, hogy az adott változót tartalmazó tagok azon az oldalon legyenek, ahol a nekik megfelelő dx vagy dy kifejezés *szorzóként* szerepel.

Példa

100 gramm cukrot vízbe szórunk. Az oldódás sebessége a még fel nem oldott cukor mennyiségével arányos. Írjuk fel a folyamatot leíró differenciálegyenletet!

Legyen a t másodperc alatt feloldódott cukor mennyisége q gramm. Ha kis dt idő alatt dq mennyiségű cukor oldódik fel, akkor az oldódás sebessége $\frac{dq}{dt}$ és ez arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével, azaz

$$\frac{dq}{dt} = k(100 - q)$$

ahol k valamilyen arányossági tényező. Ez az egyenlet szétválasztható változójú differenciálegyenlet (hisz ha nem az lenne, nem ebben az alfejezetben szerepelne példaként), így megoldhatjuk integrálással:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{100-q} &= kdt \\ -\ln(100-q) &= kt - c \\ 100 - q &= e^{-kt+c} = Ce^{-kt} \\ q &= 100 - Ce^{-kt} \end{aligned}$$

ahol $C = e^c$. Ennyi gramm cukor lesz t másodperc múlva a vízben oldott állapotban.

Gyakorló példák

1. $x^3dx + x(y+1)^6dy = 0$
2. $\frac{y^2-9}{y^2-3y}y' + \frac{x-9}{x^2} = 3y'$
3. $(1+x^3)dy - x^2ydx = 0$

2.2.3. Egzakt differenciálegyenletek

Az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.26}$$

elsőrendű differenciálegyenletet akkor nevezzük egzaktnak, ha

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2.27}$$

Tehát ebben az esetben létezik olyan $F(x,y)$ függvény, hogy

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.28}$$

tehát

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF(x,y) \tag{2.29}$$

vagyis a differenciálegyenlet bal oldalán az F függvény teljes differenciálja áll. A differenciálegyenlet teljes megoldása így

$$F(x,y) = C \tag{2.30}$$

Ezen ismeretlen függvény meghatározására két módszer is lehetséges.

1. Mivel
$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.31}$$
az F függvény megadható
$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + f(x) \tag{2.32}$$
alakban egy egyelőre ismeretlen, *csak x-től függő*, függvénnyel. Mivel azonban
$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \tag{2.33}$$
ezért
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)dy + f(x)\right] \equiv M(x,y) \tag{2.34}$$
azaz
$$\int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy + f'(x) \equiv M(x,y) \tag{2.35}$$
amiből az ismeretlen $f(x)$ függvény kiszámítható:
$$f(x) = \int \left[M(x,y) - \int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy\right] dx \tag{2.36}$$
Ezt felhasználva adódik, hogy
$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int \left[M(x,y) - \int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy\right] dx \tag{2.37}$$
Azonban fordítva is eljárhattunk volna, azaz az x változó helyett y változót is használhattunk volna. Abban az esetben a következő összefüggést kapnánk:
$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right] dy \tag{2.38}$$
(Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a (2.38) kifejezés tényleg igaz!)

2. Az $F(x,y)$ függvény a dF teljes differenciáljából vonalintegrállal is kiszámítható. Az integrálás a T tartományon[1] Az integrálás a T tartomány valamely tetszőleges (x_0, y_0) pontjából kiinduló, tetszőleges, teljes egészében a T-ben fekvő görbe mentén történik. Ha a görbét célszerűen úgy választjuk, hogy az a koordinátatengelyekkel párhuzamos szakaszokból álljon, akkor
$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)d\eta \tag{2.39}$$

[1]A T tartományt úgy választjuk, hogy azon mindkét függvény folytonos és differenciálható legyen. A gyakorlati példamegoldásban általában az $\mathbb{R}^2$, azaz a teljes valós számsík.

Példa

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet: $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$
   A differenciálegyenlet egzakt, mert

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3 - 2xy) = 12x^3y^2 - 2x \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^4y^2 - x^2) = 12x^3y^2 - 2x \tag{2.41}$$

Ekkor teljes differenciálként integrálva a (2.32) egyenletnek megfelelően:

$$F(x,y) = \int (3x^4y^2 - x^2)dy = x^4y^3 - x^2y + f(x) \tag{2.42}$$

azonban a (2.33) egyenlet miatt

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^4y^3 - x^2y + f(x)) = 4x^3y^3 - 2xy \tag{2.43}$$

azaz

$$4x^3y^3 - 2xy + f'(x) \equiv 4x^3y^3 - 2xy \tag{2.44}$$

amiből látszik, hogy $f'(x) = 0$ azaz $f(x) = C$. Ebből az egyenlet általános megoldása

$$F(x,y) = x^4y^3 - x^2y + c \tag{2.45}$$

egyenlet alapján:

$$x^4y^3 - x^2y = C \tag{2.46}$$

A megoldást vonalintegrálos módszerrel is kereshetjük. Ekkor legyen a kezdőpont az origó, a végpont pedig (x, y) tetszőleges koordinátájú pont. Az integrációs út előbb legyen a $(0,0) \to (x,0)$, majd a $(x,0) \to (x,y)$ a 2.1. ábrának megfelelően. Az első szakasz az x-tengelyen van, ekkor $y = 0$, a második az y-tengellyel párhuzamosan halad az y-tengelytől x távolságra. Ekkor

$$F(x,y) = \int_0^x (4\xi^3 \cdot 0^3 - 2\xi \cdot 0)d\xi + \int (3x^4\eta^2 - x^2)d\eta = 0 + \left[3x^4\frac{\eta^3}{3} - x^2\eta\right]_0^y = x^4y^3 - x^2y \tag{2.47}$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$x^4y^3 - x^2y = C \tag{2.48}$$

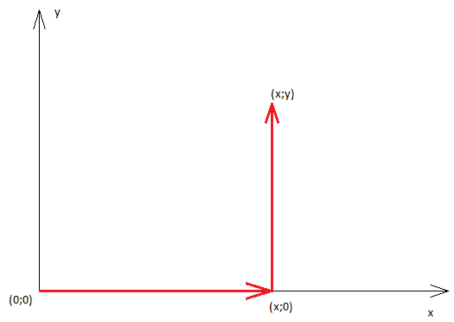
Gyakorló feladatok

1. $(x^2 - y)dx - xdy = 0$

2. $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

3. $y' = -\frac{x}{y}$ Értelmezzük a kapott megoldást!

4. Oldjuk meg mindkét módszerrel a $(x + y\cos x)dx + \sin x dy = 0$



2.1. ábra. Az integrálási útvonal

2.2.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Az

$$y' + yP(x) = Q(x) \tag{2.49}$$

alakú differenciálegyenletet elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. Ha $Q(x) \equiv 0$ akkor az egyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén* egyenletről beszélünk. A differenciálegyenletek fajtáinál megtárgyaltuk, hogy vannak állandó, illetve kedzeti feltétel differenciálegyenletek is. Ezekre példa:

$$3y' + 2y = e^x \tag{2.50}$$

$$y' + 2xy = \sin x \tag{2.51}$$

Mind a két egyenlet lineáris, inhomogén, közönséges differenciálegyenlet, de az első állandó együtthatós, a második viszont függvényegyütthatós.

Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Ugyanakkor az

$$y' + yP(x) = 0 \tag{2.52}$$

alakú differenciálegyenlet szétválasztható változójú differenciálegyenlet is, hisz

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \tag{2.53}$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx. \tag{2.54}$$

Ezt integrálva kapjuk, hogy

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + c \tag{2.55}$$

s így az általános megoldás előáll

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{2.56}$$

alakban, ahol C tetszőleges konstans.

Példa

Egy radioaktív mintában az időegység alatt elbomló magok száma arányos az elemben lévő magok kezdeti számával és egy bomlási állandó nevű konstanssal, λ-val. Felírva az egyenletet:

$$dN = -\lambda N dt \tag{2.57}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{2.58}$$

vagyis a bomlási törvény így

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2.59}$$

Gyakorló feladatok

1. $y' + 3x^2 y = 0$

2. $xy' - y' + x^2 = 0$

3. $y' - 2y \tan x = 0$

Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek. A Lagrange-féle állandók variálásának módszere

Az elsőrendű inhomogén differenciálegyenlet általános alakja

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{2.60}$$

A $P(x)$ lehet állandó, vagy függvény együttható is. A $Q(x)$ függvényt forrásnak vagy zavaró függvénynek nevezzük. Az ilyen differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0 \tag{2.61}$$

ahol Y az adott inhomogén egyenlethez tartozó

$$Y' + P(x)Y = 0 \tag{2.62}$$

homogén egyenlet általános megoldása, y_0 pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Az előző rész alapján a homogén rész általános megoldása a (2.56) összefüggés alapján adható meg. A partikuláris rész megoldását most a Lagrange-féle állandók variálásának módszerével keressük. A módszer lényege, hogy az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását a már ismert homogén egyenlet megoldásához hasonló szerkezetűnek tételezzük fel. A különbség az lesz, hogy az állandó nem állandó lesz a partikuláris esetben, hanem függeni fog x-től: $C(x)$, azaz

$$y_0 = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{2.63}$$

A kérdés így az, hogy milyen $C(x)$ mellett lesz az y_0 az inhomogén egyenletnek megoldása. Kiszámítva a deriváltat

$$y_0' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-P(x)dx}(-P(x)) \tag{2.64}$$

majd ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \tag{2.65}$$

amiből adódik, hogy

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.66}$$

Vegyük észre, hogy ebben az egyenletben a $C(x)$ nem szerepel. Ez rendkívül fontos, hisz így tudjuk az egyenletet integrálni anélkül, hogy tudnánk a $C(x)$ alakjáról bármit. (Ez azért fontos, mert ha szigorúan akarjuk a dolgot felfogni, akkor integrálás előtt az adott függvényről be kéne látni, hogy az integrálható-e és ha igen, milyen feltételek mellett.)

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{2.67}$$

Ezzel a $C(x)$ függvényt meghatároztuk. Így az inhomogén rész egy megoldását felírhatjuk a

$$y_0 = C(x)Y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] e^{-\int P(x)dx}. \tag{2.68}$$

Figyelembe véve a homogén részről mondottakat az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_0 + Y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \tag{2.69}$$

Ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, ha észrevesszük, hogy

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\left(y' + yP(x)\right) \tag{2.70}$$

azaz $e^{\int P(x)dx}$ egy ún. , amely az inhomogén egyenlet bal oldalát teljes differenciálba viszi át. Szorozzuk meg tehát az inhomogén egyenlet mindkét oldalát az integráló tényezővel. Ekkor

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x) \tag{2.71}$$

Mind a két oldalon integrálva

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{P(x)dx} + C \tag{2.72}$$

amiből

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{P(x)dx}dx + C\right). \tag{2.73}$$

Példa

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2 \tag{2.74}$$

Első megoldás: Oldjuk meg először a homogén egyenletet

$$Y' - \frac{Y}{x} = 0. \tag{2.75}$$

Ez egy szétválasztható változójú egyenlet, melynek megoldását az előző fejezetek alapján az Olvasóra bízzuk. A megoldás

$$Y = Cx \tag{2.76}$$

Most keressük meg az inhomogén egyenlet egy y_0 partikuláris megoldását. Mint első megoldás, ezt az állandó variálásának módszerével tesszük.

Tehát

$$y_0 = C(x)x \tag{2.77}$$

azaz

$$y_0' = C'(x)x + C(x).$$

Ezt visszahelyettesítve adódik

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 + 3x - 2 \tag{2.78}$$

amiből

$$C'(x) = x + 3 - \frac{2}{x} \tag{2.79}$$

vagyis

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| \tag{2.80}$$

Ennek megfelelően a partikuláris megoldás

$$y_0 = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x| \tag{2.81}$$

és így az általános megoldás

$$y = Y + y_0 = \frac{x^3}{2} + 3x^2 + Cx - 2x\ln|x|. \tag{2.82}$$

Második megoldás: Mivel

$$\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x \tag{2.83}$$

így az integráló tényező

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \tag{2.84}$$

alakú. Ennek segítégével

$$\frac{y}{x} = \int \frac{1}{x}(x^2 + 3x - 2)dx \tag{2.85}$$

vagyis

$$y = x\int \left(x + 3 - \frac{2}{x}\right) dx = x\left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| + C\right) = \tag{2.86}$$

$$= \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x| + Cx. \tag{2.87}$$

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy a fenti példa végeredménye valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket mindkét módszerrel:

   - $y' \sin(x) - y\cos(x) = -1$
   - $(x-2)y' - y = 2(x-2)^3$
   - $y' - y = x$
   - $x^3y' + (2 - 3x^2)y = 2x^3$
   - $2(2 - x^3)y' - (1 + x)^2y = \sqrt[3]{1 - x^2}$
   - $2y' - y = \sin 2x$

Elsőrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek.

Az elsőrendű kedzeti feltétel lineáris differenciálegyenletek általános alakja

$$ay' + by = Q(x). \tag{2.88}$$

Természetesen ha $Q(x) \equiv 0$ akkor homogén, ellenkező esetben inhomogén egyenletről beszélünk. Mivel az kedzeti feltétel egyenletek a kedzeti feltétel egyenletek egy speciális fajtáját adják, ezért az előzőekben megtanult módszerek itt is alkamazhatóak. Azonban most egy olyan módszert mutatunk be, amely csak ebben a speciális esetben alkalmazható és csak akkor, ha a $Q(x)$ függvény (vagy) speciális alakú. Ha a

- polinom,
- exponenciális függvény[2],
- $\sin(\alpha x + \beta)$, $\cos(\alpha x + \beta)$ alakú trigonometrikus függvény[3],
- illetve ezek összege, különbsége, szorzata, vagy szorzatának összege vagy különbsége

akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását ugyanolyan típusú függvényként kereshetjük, mint amilyen típusú a maga, csupán azzal a különbséggel, hogy az együtthatókat határozatlannak választjuk. Ezt nevezzük *próbafüggvénynek.* A határozatlan együtthatókat a megoldásnak a diffferenciálegyenletbe való visszahelyettesítésével és a kapott egyenletet megoldásával határozhatjuk meg.

Előfordulhat, hogy a homogén egyenletből adódó megoldás és a alapján felírt próbafüggvény nem lineárisan független, vagyis a hányadosuk állandó. Ekkor rezonanciáról beszélünk. Ekkor vagy az előzőekben használt valamelyik módszert alkalmazzuk, vagy a $Q(x)$ alapján felírt próbafüggvényt megszorozzuk x-szel és így a $y_0 \to xy_0$ próbafüggvényt használjuk.

Azért érdemes ezt a módszert megtanulni, mert ha alkalmazható, akkor a számolások lényegesen könnyebek. Például nem kell integrálni, ami sok esetben, főleg egy ZH példa esetén nagy könnyebbséget jelenthet.

Áttekintésképpen nézzük a következő eseteket:

1. Legyen $Q(x) = x^2$! Ekkor a próbafüggvényünk $y_0(x) = Ax^2 + Bx + C$
2. Legyen $Q(x) = \sin(\alpha x + \beta)$ vagy $Q(x) = \cos(\alpha x + \beta)$! A próbafüggvény *mindkét esetben* $y_0(x) = A\sin(\alpha x + \beta) + B\cos(\alpha x + \beta)$
3. Legyen $Q(x) = x^2 e^{2x}$! Ekkor a próbafüggvény $y_0(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.

[2] Az exponenciális függvény felírható egy végtelen hatványsor alakjában.
[3] A trigonometrikus függvények tulajdonképpen exponenciális függvények egy speciális kombinációja.

Példák

Oldjuk meg az előző fejezetben feladott példát a most tanult módszerrel: $2y' - y = \sin 2x$.

$$2Y' - Y = 0 \tag{2.89}$$

homogén egyenlet megoldása: $Y = Ce^{\frac{x}{2}}$. Az inhomogén egyenlet megoldását, mivel a trigonometrikus

$$y_0 = A\sin 2x + B\cos 2x \tag{2.90}$$

alakban keressük, melynek deriváltja

$$y_0' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x. \tag{2.91}$$

Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x - A\sin 2x - B\cos 2x \equiv \sin 2x \tag{2.92}$$

Ez az azonosság akkor teljesül, ha

$$4A - B = 0 \quad \text{és} \quad -4B - A = 1. \tag{2.93}$$

Vagyis

$$A = -\frac{1}{17} \quad \text{és} \quad B = -\frac{4}{17}. \tag{2.94}$$

Így

$$y_0 = -\frac{1}{17}(\sin 2x + 4\cos 2x). \tag{2.95}$$

És így az általános megoldás

$$y = Y + y_0 = Ce^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{17}(\sin 2x + 4\cos 2x). \tag{2.96}$$

Gyakorló példák

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

- $y' - y = x^2$
- $y' - 4y = 8x^3 - 3x + \sin 3x$
- $y' - 3y = e^{3x} - x^2 + \sin x$
- $y' - 2y = 3e^{2x}$ (!)

2.3. Másodrendű differenciálegyenletek

Rövid motivációként megjegyezzük, hogy a másodrendű differenciálegyenletek a klasszikus mechanikában rendkívül fontosak. Természetesen vannak egyéb alkalmazási területek is. Mivel Newton II. axiómája, a dinamika alaptörvénye egy másodrendű differenciálegyenlet, így nem meglepő, hogy a mozgások leírására az ilyen differenciálegyenletek megoldása elkerülhetetlen.

A másodrendű differenciálegyenlet általános alakját implicit formában szokás megadni, ami most nekünk nem érdekes. Minden tárgyalt típusnál a második deriváltat explicit ki tudjuk fejezni, azonban ez még nem biztosíték arra, hogy meg is tudjuk oldani a differenciálegyenletet. Sőt, általában egy másodrendű differenciálegyenlet megoldásának előállítására nincs mód. Azonban speciális típusaira léteznek receptek, melyek közül megtárgyalunk néhányat az elkövetkezendő fejezetekben.

2.3.1. Hiányos másodrendű diffegyenletek, $y'' = f(x)$ alakú diffegyenletek

A legegyszerűbb másodrendű differenciálegyenletről azonnal látszik, hogy kétszeri integrálással megadható az általános megoldás:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x) \\ y' &= \int f(x)dx + c_1 \\ y &= \int dx \left(\int dx f(x) \right) + c_1 x + c_2 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Példa

Oldjuk meg a szabadesés mozgásegyenletét úgy, hogy a légellenállástól eltekintünk!

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{dt^2} &= g \\ \frac{ds}{dt} &= gt + c_1 \\ s &= \frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Mivel fizikai példáról van szó, el kell gondolkodnunk, vajon mi a két integrálási konstans jelentése. A dolog azonnal megvilágosodik, amint a kezdeti feltételeket tisztázzuk. A bevezető fejezetből tudjuk, hogy ahányad rendű a differenciálegyenlet, annyi kezdeti feltételt kell kiróni: jelen esetben kettőt, hogy a két integrálási konstanst meghatározzuk. Ha a fizikai jelenségre, azaz a szabadesésre gondolunk, világos, melyik ez a két mennyiség: milyen magasról és mekkora kezdősebességgel kezdte meg mozgását a tárgy. Jól jegyezzük meg, hogy minden ilyen mechanikai példa esetén a két kezdeti feltétel a mozgás kezdőpontja és a kezdősebesség lesz.

A mi esetünkben tehát a következőket tehetjük fel, csupán a példa kedvéért. A szabadesés h magasságban és v_0 kezdősebességgel kezdődött, azaz a $t = 0$ időpillanatban ezek az értékek voltak. a (2.98) második egyenlete épp a sebességre vonatkozik. Így a $t = 0$ helyettesítéssel adódik, hogy $c_1 = v_0$. És ugyanígy a harmadik egyenletben adódik, hogy $c_2 = h$. Azaz a kedzeti feltételekkel az általános megoldás a jól ismert törvény:

$$s = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h. \tag{2.99}$$

Gyakorló példák

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

1. $(1 + \tan x)^2 y'' = 1$
2. $(2 + \ln x^3) y'' = \sin x$
3. $y'' = \lim_{\Delta x \to 0} e^{\frac{x^2}{\Delta x}} sinx$

2.3.2. Hiányos másodrendű diffegyenletek, $F(x, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletek

Ha a differenciálegyenletünkből az y hiányzik, a probléma könnyen visszavezethető két elsőrendű egyenlet megoldására az

$$y' = p(x) \tag{2.100}$$

helyettesítéssel. Ekkor az eredeti egyenlet $F(x, y', y'') \to F(x, p, p')$ elsőrendű egyenletbe megy át és így ezt, valamint a helyettesítést jelentő egyenletet kell megoldanunk.

Példa

Lássuk az előző példafeladatot egy kicsit megbonyolítva. Ismeretes, hogy a légellenállástól való eltekintés csak kisebb magasságról történő esések esetén jogos. Ha magasabb helyről, például egy repülőből ejtünk ki egy tárgyat, akkor egy idő után a légellenállás miatt konstans sebességgel fog zuhanni. A légellenállásból származó csillapítás a sebesség négyzetével arányos[4]. Az arányossági tényező legyen k^2. Vagyis egységnyi tömegű testre a következőképpen írhatjuk fel a differenciálegyenletünket:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g - k^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{2.101}$$

Az korábban elmondottak alapján végezzünk helyettesítést: $\frac{ds}{dt} = v$, így

$$\frac{dv}{dt} = g - k^2 v^2. \tag{2.102}$$

[4]Megjegyezzük, hogy ez is csak egy közelítés. Kis sebességek esetén, mint a 4.3.4. példában a sebességgel arányos a csillapítás. Egész nagy sebességeknél már minden ilyen közelítés elromlik. Ennek oka a test mögött képződő turbulenciákban keresendő, melyek analitikus kezelése nagyon nehéz és csak speciális esetekben ismertek zárt formulák a jelenségek leírására.

Ez az egyenlet egy szétválasztható változójú elsőrendű differenciálegyenlet, megoldását integrálással kapjuk:

$$\int \frac{dv}{g - k^2 v^2} = \int dt. \tag{2.103}$$

Az integrál eredménye(ld.:1.1. táblázat):

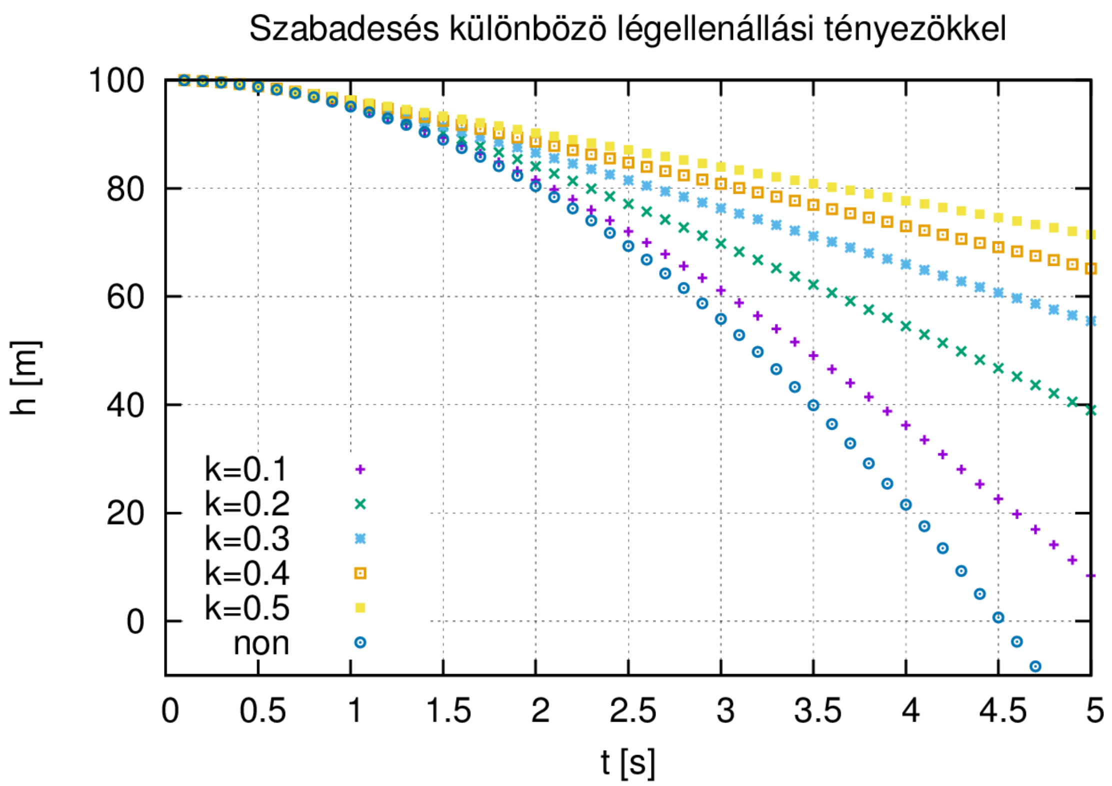
$$t = \frac{\operatorname{atanh} \frac{vk}{\sqrt{g}}}{k\sqrt{g}} \tag{2.104}$$

Rendezzük ezt v-re és integráljuk a kifejezést, hogy megkapjuk x-et:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sqrt{g}}{k} \tanh(k\sqrt{g}t) \\ x &= \int v = \int \frac{\sqrt{g}}{k} \tanh(k\sqrt{g}t) = \frac{1}{k^2} \ln\cosh(k\sqrt{g}t) + h_0 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Megkaptuk az általános megoldást. Ellenőrizhető, hogy a $\lim_{k\to 0}$ esetben éppen $x = \frac{gt^2}{2} + h_0$.

Valószínűleg senki nem tudja hirtelen elképzelni a $\ln\cosh(x)$ függvényt, ahogy a jegyzet írója sem, így különböző k értékekre ábrázoljuk a megoldást $h_0 = 100$, $v_0 = 0$ kedzeti feltételekkel a 2.2. ábrán.



2.2. ábra.

Gyakorló feladat

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

1. $(2x)^2 y'' = 4x^4 - 4xy'$
2. $(y'' + y')^2 - 2y'y'' - y'^2 = y''$

2.3.3. Hiányos másodrendű diffegyenletek, $F(y, y', y'') = 0$ alakú diffegyenletek

Ha a másodrendű differenciálegyenletből a független változó hiányzik, akkor is visszavezethető két elsőrendű egyenletre, de itt a helyettesítés $y' = p(y)$. Mivel a p az y-tól függ, ezért

$$y'' = \frac{dy'}{dy} = \frac{dp(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p. \tag{2.106}$$

Eredeti egyenletünk helyett tehát az

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0, \tag{2.107}$$

$$y' = p(y) \tag{2.108}$$

egyenleteket kell megoldani.

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$y''y = 2y'^2 - 2y' \tag{2.109}$$

A helyettesítés így

$$y' = p(y) \quad y'' = \frac{dp}{dy}p \tag{2.110}$$

vagyis a megoldandó diffegyenlet

$$\frac{dp}{dy}py = 2p(p-1) \tag{2.111}$$

Egyszerűsítve

$$\frac{dp}{dy}y = 2(p-1) \tag{2.112}$$

Integrálva

$$\int \frac{dp}{2(p-1)} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(p-1) = \ln y + \ln c$$

$$p = y^2c^2 + 1 \tag{2.113}$$

S mivel $p = y'$:

$$y' = y^2c^2 + 1$$

$$dx = \frac{dy}{y^2c^2 + 1}$$

$$y = \frac{1}{c}\tan(cx + k) \tag{2.114}$$

Gyakorló feladatok

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket

1. $yy'' - y'^3 = y$
2. $(y^2y')' = 0$

2.3.4. Állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek

A homogenitás ebben az esetben is úgy értendő, ahogy az elsőrendű egyenletek esetében. Az kedzeti feltétel, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.115}$$

Azonnal látszik, hogy az $y = 0$ triviálisan megoldja az egyenletet. Nyilván szeretnénk nemtriviális megoldást is találni.

Legyen az egyenlet egy partikuláris megoldása $y = e^{\lambda x}$. λ egyelőre ismeretlen. Ezt helyettesítve az egyenlet átmegy egy algebrai egyenletbe, az ún. *karakterisztikus egyenletbe*:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{2.116}$$

Mint az tudott, egy ilyen másodfokú egyenlet esetén a D diszkrimináns értékétől függően három eset valósulhat meg:

1. <u>$D > 0$ *eset*</u>: Ha pozitív a determináns, akkor két *valós* gyöke (λ_1, λ_2) van az egyenletnek, vagyis az eredeti egyenletnek két lineáris független megoldása írható fel

   $$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}. \tag{2.117}$$

   Így a differenciálegyenlet általános megoldása a kettő összege (a linearitás miatt)

   $$Y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} \tag{2.118}$$

2. <u>$D = 0$ *eset*</u>: Ha a determináns zérus, akkor az egyenletnek csak egy kétszeres gyöke van, ezért a partikuláris megoldás

   $$y_1 = e^{\lambda x} \tag{2.119}$$

   alakban írható. Belátható, hogy az állandók variálásának módszerével megadható egy másik lineárisan független megoldás

   $$y_2 = xe^{\lambda x} \tag{2.120}$$

   alakban, vagyis az általános megoldás a

   $$Y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x) \tag{2.121}$$

   alakú lesz.

3. <u>*$D < 0$ eset*</u>: Ha a determináns negatív, akkor az egyenletnek két *komplex* gyöke van. Legyenek ezek $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Most a két lineárisan független partikuláris megoldás

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{2.122}$$

Ha felhasználjuk a komplex számokra vonatkozó Euler-féle felírást, akkor az általános megoldás

$$Y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \tag{2.123}$$

alakban írható.

Örvendetes, hogy egyik esetben sem kellett integrálnunk, csupán egy másodfokú algebrai egyenletet megoldani.

Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata

A csillapítatlan rezgőmozgás differenciálegyenlete

$$\ddot{y} = -\omega^2 y. \tag{2.124}$$

Ezen egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0, \tag{2.125}$$

melynek két lineárisan független megoldása

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \tag{2.126}$$

ezért a két lineárisan független megoldás

$$y_1 = \cos \omega t \quad y_2 = \sin \omega t. \tag{2.127}$$

Az általános megoldás előáll, mint

$$Y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \tag{2.128}$$

Az integrálásból származó konstansok (c_1, c_2) szokás szerint a kezdeti feltételek figyelembe vételével adódnak. Legyen a kezdeti időpont $t = 0$, amikoris az $y(0) = 0$, azaz például az egyensúlyi helyzetben adunk egy pofont a testnek, melyhez egy $y'(0) = v_0$ kezdősebesség tartozik. Így

$$Y(0) = 0 = c_1 \quad Y'(0) = v_0 = c_2\omega \tag{2.129}$$

azaz

$$Y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{2.130}$$

Lehetett volna az egyensúlyi helyzetből kitérített, kezünkben tartott, majd a $t = 0$ pillanatban elengedett test kezdeti feltételét is vizsgálni. Ekkor $y(0) = A$ és $y'(0) = 0$. Ekkor

$$Y(0) = A = c_1 \quad Y'(0) = 0 = c_2\omega \tag{2.131}$$

vagyis ekkor

$$Y = A \cos \omega t \tag{2.132}$$

Csillapított rezgőmozgás vizsgálata

Abban az esetben ha van csillapítás, például valamilyen okból a test súrlódik, az egyenlet a

$$m\ddot{y} = -\omega^2 m y - 2s\dot{y} \tag{2.133}$$

egyenlet adja a mozgásegyenletet. Ha végigosztunk m-mel és bevezetjük a $\frac{s}{m} = k$ mennyiséget, mely így a tömegegységre jutó csillapítást jelenti, és rendezzük, akkor az

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{2.134}$$

egyenletre jutunk[5]. Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0 \tag{2.135}$$

amelynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega^2}}{2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}. \tag{2.136}$$

k és ω nagyságától függően három esetet lehet megkülönböztetni.

1. eset: legyen $k^2 - \omega^2 > 0$, azaz $k > \omega$. Ez azt jelenti, hogy a súrlódás a rezgést kiváltó erőhöz képest nagy. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek – lévén a determináns pozitív – két valós gyöke van és mindkettő negatív. Ezt könnyen be lehet látni a (2.136) egyenlet alapján. A differenciálegyenlet általános megoldása így

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{2.137}$$

Kezdeti feltételnek válasszuk

$$Y(0) = 0, \dot{Y}(0) = v_0 > 0. \tag{2.138}$$

Ekkor adódik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ v_0 &= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2. \end{aligned} \tag{2.139}$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$c_1 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad , \quad c_2 = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{2.140}$$

és így a kezdetű feltételek kielégítő megoldás

$$Y = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \tag{2.141}$$

Vizsgáljuk a megoldást! Mivel a $\lambda_1 > \lambda_2$ ezért $Y \geq 0$. A $t = 0$ időpontban $Y = 0$, majd egy t_1 időpontban eléri a maximumát, és további t idővel zérushoz tart. A rezgés aperiodikus. Az ilyen rezgést *túlcsillapítottnak* nevezzük.

Végezzünk függvényvizsgálatot a t_1 időpont megállapítására!

2. eset, ha a determináns nulla, vagyis ha $k = \omega$.

3. eset, ha a determináns negatív, vagyis ha $k^2 - \omega^2 < 0$

[5] Vegyük észre, hogy a szabadesés esetén 2.3.2. fejezetben a sebesség négyzetével volt arányos a csillapítás, azonban itt azonban csak a sebességgel

Gyakorló feladatok

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket

1. $y'' - 7y = 10$
2. $8y'' + 22y = -15$
3. $y'' - 2y = -1$
4. $y'' + 3y = -4$
5. $y'' - 5y = 14$

2.3.5. Állandó együtthatós, inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek. A próbafüggvény módszere

Az előző fejezetben megtárgyaltuk a

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.142}$$

homogén egyenlet általános megoldásának keresését. Ebben a fejezetben az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását határozzuk meg. Amennyiben a zavarófüggvény speciális alakú, ahogy azt az elsőrendű esetben is tárgyaltuk, használható az ún. *próbafüggvény módszere*. Ugyanúgy, ahogy az elsőrendű esetben, itt is igaz, hogy a zavarófüggvénynek a következő alakúnak kell lennie:

- polinom
- exponenciális
- trigonometrikus függvény
- vagy ezek összege, szorzata, összegének szorzata, szorzatának összege.

Ekkor az inhomogén egyenlet y_0 megoldását olyan alakúnak tételezzük fel, amilyen maga a zavarófüggvény, csak az együtthatót tekintjük ismeretlennek. Az így felírt függvény lesz a próbafüggvény. Mindent egészen úgy kell csinálnunk, mint az elsőrendű esetben, vagyis ha polinom a zavarófüggvény, akkor a próbafüggvénynek egy annyiad rendű polinomnak kell lennie, mint a zavaró függvény, de az alacsonyabb rendű tagokat is tartalmaznia kell, akár tartalmazza a zavaró függvény azokat, akár nem. A helyzet ugyanez a trigonometrikus függvények esetén is. Ha a zavarófüggvény $\sin(\alpha x + \beta)$, akkor a próbafüggvényünk tartalmazza $\cos(\alpha x + \beta)$ tagot is.

Ahogy az elsőrendű esetben, itt is külön említendő a rezonancia. Akkor beszélünk rezonanciáról, ha a homogén egyenlet általános megoldása megegyezik a zavarófüggvény valamely tagjával. Belátható, hogy ekkor a zavarófüggvény alapján felírt próbafüggvényt vagy annak valamely tagját meg kell szorozni x-szel. Ha az így kapott próbafüggvény megegyezik egy másik tagjával a zavarófüggvénynek, azaz kétszeres rezonancia van, akkor még egyszer megszorozzuk x-szel.

Példa

Legyen

$$y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x - x^2 \tag{2.143}$$

egyenletünk. A zavarófüggvény ebben az esetben $f(x) = 3 - 2x - x^2$. Keressük meg a homogén egyenlet általános megoldását! A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \tag{2.144}$$

Ennek gyökei a $\lambda_1 = -4$ és $\lambda_2 = -1$, így a homogén egyenlet általános megoldása $Y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x}$. Az inhomogén egyenlet megoldását a próbafüggvény módszerével a

$$y_0 = Ax^2 + Bx + C \tag{2.145}$$

alakban felírt A, B és C ismeretlen együtthatókkal rendelkező próbafüggvénnyel végezzük. Ekkor

$$\begin{aligned} y_0' &= 2Ax + B \\ y_0'' &= 2A \end{aligned} \tag{2.146}$$

Ezeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe adódik, hogy

$$2A + 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 3 - 2x - x^2 \tag{2.147}$$

vagyis

$$\begin{aligned} 4A &= -1 \\ 10A + 4B &= -2 \\ 2A + 5B + 4C &= 3. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Ezekből adódik, hogy

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{4} \\ B &= \frac{1}{8} \\ C &= \frac{23}{32} \end{aligned} \tag{2.149}$$

így a partikuláris megoldás

$$y_0 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{23}{32} \tag{2.150}$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0 = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{23}{32} \tag{2.151}$$

Kényszerrezgés

Az előző fejezetben megvizsgáltuk a harmonikus rezgőmozgást szabad és csillapított esetben. Ebben a fejezetben a rendszerre egy külső erőt kapcsolunk, a testet rezgőmozgásra *kényszerítjük*. Legyen a gerjesztő erő periodikus

$$F = F_0 \sin \omega_{\mathrm{g}} t \tag{2.152}$$

Ekkor a mozgást leíró differenciálegyenlet a

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega_{\mathrm{g}} t. \tag{2.153}$$

Legyenek a kedzeti feltételek $y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0$. Határozzuk meg a kitérés-idő függvényt!

A kapott egyenlet inhomogén. A homogén részhez tartozó általános megoldást egyszer már megkerestük. Jelen esetben ez a kedzeti feltételek figyelembevételével a

$$Y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \tag{2.154}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével az

$$y_0 = A \sin \omega_{\mathrm{g}} t + B \cos \omega_{\mathrm{g}} t \tag{2.155}$$

alakban keressük. Ekkor a deriváltak

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 =& \omega_{\mathrm{g}} A \cos \omega_{\mathrm{g}} t - \omega_{\mathrm{g}} B \sin \omega_{\mathrm{g}} t \\ \ddot{y}_0 =& -\omega_{\mathrm{g}}^2 A \sin \omega_{\mathrm{g}} t - \omega_{\mathrm{g}}^2 B \cos \omega_{\mathrm{g}} t \end{aligned} \tag{2.156}$$

Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe

$$A(\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2) \sin \omega_{\mathrm{g}} t + B(\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2) \cos \omega_{\mathrm{g}} t = \frac{F_0}{m} \sin \omega_{\mathrm{g}} t \tag{2.157}$$

Ha $\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2 \neq 0$, akkor az azonosság csak úgy teljesül, ha

$$B = 0 \quad \text{és} \quad A(\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2) = \frac{F_0}{m} \rightarrow A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2)}. \tag{2.158}$$

Így az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldása

$$y_0 = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2)} \sin \omega_{\mathrm{g}} t, \tag{2.159}$$

az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig

$$y = Y + y_0 = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_{\mathrm{g}}^2)} \sin \omega_{\mathrm{g}} t. \tag{2.160}$$

A megvalósuló mozgás tehát két állandó amplitúdójú, de különböző frekvenciájú rezgőmozgás eredője lesz. Az értelmezést megkönnyíti, ha bevezetjük az

$$\frac{\omega_{\mathrm{g}}}{\omega} = \nu \tag{2.161}$$

paraméter, ugyanis ekkor

$$\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_{\mathrm{g}}^2)}=\frac{F_0}{m\omega^2}\frac{1}{1-\nu^2} \tag{2.162}$$

ahol $\frac{1}{1-\nu^2}=N$ a nagyítási tényező. Ha $\omega_{\mathrm{g}} << \omega$, a gerjesztő frekvencia jóval kisebb, mint a rendszer saját frekvenciája, azaz a nagyítás $N \approx 1$ vagyis a kényszerrezgés amplitúdója alig változik. Ha növekszik a frekvencia, akkor az N is növekszik. A $\omega_{\mathrm{g}} \to \omega$ esetben az $N \to \infty$. Ez a rezonancia jelensége[6]. Ha a gerjesztő frekvencia tovább nő, N elkezd csökkenni.

Gyakorló feladatok

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:

- $y'' - 3y' + 2y = e^x + 3e^{2x}$
- $y'' - 6y' + 13y = x + \sin 3x$
- $y'' + 6y' + 9y = 3e^{2x}$

Számoljuk ki annak a rendszernek a rezonanciafrekvenciáját, melynek a külső gerjesztő ereje

- $f(x) = \frac{F_0}{m}(\cos\omega_{\mathrm{g}}t - \sin\omega_{\mathrm{g}}t)$
- $f(x) = \frac{F_0}{m}(\cos\omega_{\mathrm{g}}t - \sin^2\omega_{\mathrm{g}}t)$

[6] A mérnöki tervezésben a jelenségnek komoly szerepe van. Lásd az 1940-ben átadott és még ugyanabban az évben leszakadt Tacoma-híd esetét: https://hu.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_hidak

3. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

A parciális differenciálegyenletek a többváltozós függvények különböző változóinak deriváltjai között állapítanak meg kapcsolatot. Gondoljunk a Maxwell-egyenletekre, melyekben szerepel idő és koordináta szerinti derivált is. A hidrodinamika alapegyenletei is parciális differenciálegyenletek.

A közönséges differenciálegyenletek tulajdonképpen a parciális differenciálegyenletek egyváltozós határesetei. Az elméleti tárgyalás már a közönséges differenciálegyenletek esetén sem volt könnyű, ezért a parciális egyenletek esetén meg sem kísérli a jegyzet írója, hogy az cél olvasóközönséget olyan elvont részletekkel terhelje, melyeknek megértéséhez nagyon mély és széleskörű matematikai tudás lenne szükséges. Másfelől a környezeti alkalmazások szempontjából nem is érdekesek. Jelen jegyzetben két példán keresztül ismerkedünk meg a parciális differenciálegyenletek elméletében előkerülő alapvető fogalmakkal. A jegyzet végén kidolgozott példákon keresztül illusztráljuk a megoldásokat.

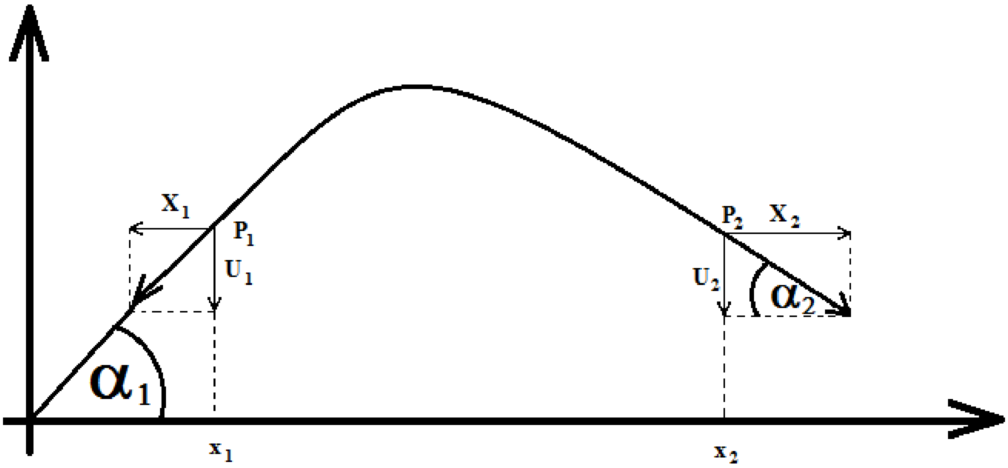
3.0.1. A rezgő húr egyenlete

Az egyik klasszikus példa parciális differenciálegyenletre a rezgő húr differenciálegyenlete. Klasszikus mechanikai tudásunkra támaszkodva – annak hiányában nagyon koncentráltan figyelve – találjuk ki a megfeszített húrra ható erőket. A probléma tehát a következő: adott egy l hosszúságú húr, mely tökéletesen rugalmas, nyugalmi helyzete az x-tengely, a kitérítés iránya pedig a merőleges az x-tengelyre, vagyis az u tengely irányába esik. A problémát azokra a rezgésekre írjuk most fel, melyek esetén a húr pontjai az x tengelyre párhuzamosan az (u, v) síkban mozognak (transzverzális síkrezgés). Nyilvánvaló, hogy a rezgést az $u(x, t)$ kétváltozós függvény írja le. Feladatunk ennek a függvénynek a meghatározása.

Az egyenlet meghatározása

Először is írjuk fel a problémát leíró egyenletet. Tekintsük a rezgő húr egy x hosszúságú elemi darabját (3.1. ábra).

A húr többi része erre az elemi darabra H húzóerőt gyakorol. A H húzóerőnek a húrelem két végpontjában levő, az x tengellyel, illetve az u tengellyel párhuzamos összetevőjét jelöljük X_1, U_1 és X_2, U_2-vel. Zárjon be továbbá s H erő iránya az x tengellyel a P_1 pontban α_1 szöget, a P_2 pontban α_2 szöget. Ha feltesszük azt, hogy a húrt a nyugalmi helyzetéből csak „kicsit”



3.1. ábra.

mozdítjuk el, azaz csak annyira, hogy a hossza gyakorlatilag ne változzék, akkor α_1 és α_2 kis szögek. Így élhetünk a következő közelítésekkel:

$$\begin{aligned} &\cos\alpha_1 \approx 1 \quad , \qquad \cos\alpha_2 \approx 1 \\ &\sin\alpha_1 \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \quad , \qquad \sin\alpha_2 \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

A P_1 húzóerőt negatívnak választva, a komponensei

$$\begin{aligned} X_1 &= -H\cos\alpha_1 = -H \quad , \qquad U_1 = -H\sin\alpha_1 = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \\ X_2 &= -H\cos\alpha_2 = H \quad , \qquad U_2 = -H\sin\alpha_2 = H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Az adott t időpillanatban a húr nyugalomban levőnek tekinthető, tehát a rá ható erők eredője zérus. Az x irányú komponensek összege

$$X_1 + X_2 = -H + H = 0 \tag{3.3}$$

azaz valóban zérus. Az u irányú komponensek összege

$$U_1 + U_2 = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} = h\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] \tag{3.4}$$

A szögletes zárójelben lévő különbség Lagrange középérték tétele szerint[1]

[1] Lagrange-féle középérték tétel: Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumban és differenciálható a (a, b) intervallum minden pontjában. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre teljesül, hogy

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

egyenlőség. A tétel geometriai jelentése: létezik az f függvény grafikonjának olyan $(\xi, f(\xi))$ pontja, amelyhez tartozó érintő páhuzamos $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő szelővel.

átírható:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_{x=\xi} \Delta x \tag{3.5}$$

ahol $\Delta x = x_2 - x_1$ és $x_1 < \xi < x_2$. Az u irányú komponens felírásánál a húr tehetetlenségét figyelembevéve, a Newton-egyenlet alapján felírható:

$$m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Delta x \tag{3.6}$$

ahol m az egységnyi hosszú húr tömege. Egyensúly esetén a húzóerő u irányú komponensének ls a tehetetlenségi erőnek egyenlőnek kell lenni, azaz

$$m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Delta x = H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=\xi}\Delta x \tag{3.7}$$

Ha a $\Delta x \to 0$, akkor a $\xi \to x$. Bevezetve továbbá a $\frac{H}{m} = c^2$ jelölést differenciálegyenletünk végső alakja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.8}$$

Az egyenlet megoldása

Ahhoz, hogy az egyenletet megoldhassuk, meg kell adnunk a húr alakját és minden egyes pontjának sebességét a $t = 0$ időpontban (kedzeti feltétel), továbbá figyelembe kell vennünk, hogy a húr végpontjának nincs elmozdulása, azaz rögzítettek (kerületi vagy peremfeltételek). Vagyis a húr rezgését leíró $u(x,t)$ függvénynek ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.9}$$

egyenletet és

$$u(x,0) = f(x) \qquad f(x) \text{ adott függvény} \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(x,0)} = g(x) \qquad g(x) \text{ adott függvény} \tag{3.11}$$

kedzeti feltételeket, valamint az

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{3.12}$$

kerületi feltételeket.

Az $f(x)$ függvény a $t = 0$ időpillanatban a húr alakját, a $g(x)$ a pontok sebességét adja meg. Az $x = 0$ és $x = l$ pontok a húr végpontjai. A kapott *másodrendű, kedzeti feltétel, homogén parciális differenciálegyenlet* D. Bernoulli-tól származó megoldása azon a lényeges észrevételen alapul, hogy a megoldást jelentő függvényt olyan szorzat alakban lehet keresni, amelynek egyik tényezője csak az x, a másik tényezője csak a t változó függvénye. Legyen tehát

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.13}$$

alakú. Ha ez a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor abba visszahelyettesítve azonosságot kell kapnunk. Előbb kiszámítjuk a parciális deriváltakat (bevezetve a $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ jelölést):

$$\partial_x u = X'(x)T(t) \tag{3.14}$$

$$\partial_t u = X(x)T'(t) \tag{3.15}$$

$$\partial_x^2 u = X''(x)T(t) \tag{3.16}$$

$$\partial_t^2 u = X(x)T''(t) \tag{3.17}$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe kapjuk, hogy

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \tag{3.18}$$

Az egyenlet változói szétválaszthatóak:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{3.19}$$

A kapott egyenlet bal oldala csak t-től függ, a jobb oldala csak x-től. Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét oldal ugyanaz az állandó. Válaszzuk ezt az állandót $-\alpha^2$-nek.

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 \tag{3.20}$$

vagy két egyenlőséget írva:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2 \qquad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 \tag{3.21}$$

Ezzel a parciális differenciálegyenletünket két közönséges egyenlet megoldására vezettük vissza, mégpedig

$$T''(t) + \alpha^2 T(t) = 0 \tag{3.22}$$

$$X''(x) + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0 \tag{3.23}$$

kedzeti feltétel, homogén, lineáris egyenletekre. Ilyen egyenletekkel találkoztunk a harmonikus rezgőmozgás leírásánál. Tekintsük az első egyenlet karakterisztikus egyenletét:

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0. \tag{3.24}$$

Ennek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm i\alpha$, általános megoldása pedig

$$T(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t). \tag{3.25}$$

A második egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 = 0 \tag{3.26}$$

melynek gyökei a $\lambda_{1,2} = \pm i\frac{\alpha}{c}$, általános megoldása pedig

$$X(x) = C\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + D\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right). \tag{3.27}$$

A keresett u függvény tehát

$$u(x,t) = X(x)T(t) = (A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))\left(C\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + D\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)\right). \tag{3.28}$$

Még meg kell határoznunk az egyelőre ismeretlen A, B, C, D, α állandókat a kerületi ill. kedzeti feltételek alapján.

Az $u(0,t)$ feltétel szerint

$$0 = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)C \tag{3.29}$$

vagyis tetszőleges t esetén csak $C = 0$ lehet a megoldás.

Az $u(l,t) = 0$ kerületi feltétel alapján

$$0 = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\left(D\sin\frac{\alpha}{c}l\right). \tag{3.30}$$

Mivel D nem lehet nulla, mert akkor a megoldás azonosan nulla volna

$$\sin\frac{\alpha}{c}l = 0 \tag{3.31}$$

legyen, vagyis

$$\frac{\alpha l}{c} = k\pi \qquad (k = 1, 2, ...) \tag{3.32}$$

Ebből

$$\alpha = \frac{kc\pi}{l} \qquad (k = 1, 2, ...). \tag{3.33}$$

Mivel α végtelen sok értéket vehet fel, célszerű indexszel ellátni

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{l}. \tag{3.34}$$

A kerületi feltételeket figyelembe véve a megoldás most már

$$u_k(x,t) = (A_k\cos\alpha_k t + B_k\sin\alpha_k t)D_k\sin\frac{\alpha_k}{l}x \tag{3.35}$$

alakú. Nyilván minden u megoldáshoz más A, B, D, α tartozhat, ezért azokat is elláttuk indexszel. Mivel a homogén egyenletek partikuláris megoldásainak összege is partikuláris, ezért írhatjuk, hogy

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\alpha_k t + B_k\sin\alpha_k t)D_k\sin\frac{\alpha_k}{l}x. \tag{3.36}$$

Végezzük el a szorzást és legyen $A_k D_k = E_k$, $B_k D_k = F_k$. Ekkor a megoldás

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_k \cos(\alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) + F_k \sin(\alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) \right]. \tag{3.37}$$

A még figyelembe nem vett $U(x,0) = f(x)$ kedzeti feltétel értelmében

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{\alpha_k}{c} x = f(x), \tag{3.38}$$

illetve α_k-t is behelyettesítve

$$\sum_{k_1}^{\infty} E_k \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x). \tag{3.39}$$

Az ismeretlen E_k és F_k együtthatók meghatározásához az adott $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket Fourier-sorba[2] kell fejteni. Belátható, hogy ha $f(x)$ függvény páratlan, felírható tiszta szinuszos sor alakjában (ha páros, akkor tiszta koszinuszos sor alakjában):

$$f(x) = \sum_{k_1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{3.40}$$

alakú, és ekkor $b_k = E_k$. Az F_k együtthatókat hasonló módon határozzuk meg. Differenciáljuk az $U(x,t)$ megoldást t szerint. Ekkor

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-\alpha_k E_k \sin \alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) + (\alpha_k F_k \cos \alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) \right]. \tag{3.41}$$

Mivel a kedzeti feltétel szerint $U_t'(x,0) = g(x)$, ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F_k \sin \frac{\alpha_k}{c} x = \sum_{k_1}^{\infty} \alpha_k F_k \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x). \tag{3.42}$$

Ha $g(x)$-et is felírjuk Fourier-alakban, akkor

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{3.43}$$

alakú. Vagyis

$$\alpha_k F_k = G_k \to F_k = \frac{G_k}{\alpha_k} \tag{3.44}$$

és ezzel az összes állandót meghatároztuk.

Foglaljuk össze eredményeinket! A

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u \tag{3.45}$$

[2] Az állítás az, hogy bizonyos feltételeket kielégítő függvények felírhatóak szinusz és koszinusz függvények végtelen soraként. A pontos matematikai tárgyalást mellőzük a jegyzetben.

differenciálegyenlet

$$u(x,0) = f(x), \qquad \partial_t u(x,0) = g(x) \tag{3.46}$$

kedzeti, valamint

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0 \tag{3.47}$$

kerületi feltételeket kielégítő megoldása

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \cos \alpha_k t + F_k \sin \alpha_k t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{3.48}$$

alakú, ahol $\alpha_k = \frac{k\pi c}{l}$, továbbá E_k a páratlannak feltett $f(x)$ függvény Fourier-sorának együtthatói, $g(x)$ pedig az α_k-kal osztott Fourier-együtthatóit jelenti. Egy speciális eset található a

3.0.2. A hővezetés egyenlete

A hővezetés egyenlete is egy parciális differenciálegyenlet, melynek levezetését itt nem adjuk meg. A fizikai probléma a következő: tekintsünk egy l hosszúságú rudat, mely az x tengely mentén fekszik. Tegyük fel, hogy a hőmérséklet az egyes keresztmetszetekben állandó és csak x-től függ. A rúd két végpontját tartsuk állandó 0°C-on. A rúd hőmérsékletét a $t = 0$ időpontban az $u(x,0) = f(x)$ függvény adja meg. Határozzuk meg azt az $u(x,t)$ függvényt, amely a rúd pontjaiban a hőmérsékletváltozást leírja!

Az egydimenziós hővezetés egyenlete

$$\partial_t u = c^2 \partial_x^2 u \tag{3.49}$$

ahol c az anyagi minőségtől függő állandó. Esetünkben a kedzeti feltétel

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.50}$$

a kerületi feltételek

$$u(0,t) = 0 \quad , \qquad u(l,t) = 0 \tag{3.51}$$

Vegyük észre, hogy mivel első időszerinti derivált szerepel az egyenletben elegendő csupán egy kedzeti feltételt rögzíteni. A differenciálegyenlet megoldását Bernoulli nyomán olyan szorzatalakban keressük, amelynek egyik tényezője csak x-től, míg másik tényezője csak t-től függ:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.52}$$

Ekkor a deriváltak

$$\partial_t u = X(x)T'(t) \quad , \qquad \partial_x^2 u = X''(x)T(t), \tag{3.53}$$

vagyis az egyenletünk

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t). \tag{3.54}$$

Az egyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{3.55}$$

alakra jutunk. A bal oldal csak t-től, a jobb oldal csak x-től függ. Az egyenlet csak úgy teljesülhet, ha mind a két oldal ugyanaz a konstans: $-\alpha^2$. Így két egyenletünk lesz:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\alpha^2 \quad , \qquad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 \tag{3.56}$$

Így a parciális differenciálegyenlet megoldását két elsőrendű egyenlet megoldására redukáltuk. Könnyen látható, hogy az első egyenlet megoldása:

$$T(t) = Ae^{-\alpha^2 t} \tag{3.57}$$

A második egyenlet a rezgő húr differenciálegyenletének megoldásakor látottak szerint

$$X(x) = E_k \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) \tag{3.58}$$

Vagyis a (3.49) egyenlet megoldása

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-\alpha_k t} \sin \frac{\alpha_k}{c} x \tag{3.59}$$

ahol E_k egyelőre ismeretlen együttható, melyet a kedzeti feltételben rögzített $f(x)$ függvény Fourier-sorának együttható határoznak meg, csakúgy, mint a rezgő húr kapcsán. Vagyis

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{3.60}$$

Fourier-sor b_k együtthatók adják az E_k együtthatókat.

A hővezetés egyenletének megoldása akkor is egyszerű, ha kicsit általánosabb kerületi feltételeket veszünk. Általánosítsuk úgy a problémát, hogy a rúd két vége legyen u_1 és u_2 hőmérsékletű:

$$u(0,t) = u_1 \quad , \qquad u(l,t) = u_2 \tag{3.61}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.62}$$

A megoldást ebben az esetben összegalakban keressük: $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, ahol $v(x)$ és $w(x,t)$ függvényeket úgy választjuk, hogy külön-külön is kielégítsék a (3.49) differenciálegyenletet. Ekkor

$$0 = c^2 \partial_x^2 v, \tag{3.63}$$

mert v nem függ t-től, illetve

$$\partial_t w = c^2 \partial_x^2 w. \tag{3.64}$$

Az első differenciálegyenlet megoldása

$$v = Ax + B. \tag{3.65}$$

A kerületi feltételek segítségével lehet az A, B együtthatókat kitalálni. Mivel

$$v(0) = u_1 \quad , \qquad v(l) = u_2 \tag{3.66}$$

ezért

$$u_1 = B \quad , \qquad u_2 = Al + B \tag{3.67}$$

és ebből

$$B = u_1 \quad , \qquad A = \frac{u_2 - u_1}{l}. \tag{3.68}$$

Ezek után határozzuk meg a $w(x,t)$ függvényt úgy, hogy a differenciálegyenlet kielégítésén túl a

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \tag{3.69}$$

feltételt is kirójuk. Így a megkívánt kerületi feltételek is teljesülnek, hiszen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= v(0) + w(0,t) = u_1 \\ u(l,t) &= v(l) + w(l,t) = u_2 \end{aligned} \tag{3.70}$$

A kedzeti feltétel

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.71}$$

volt. Mivel

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \tag{3.72}$$

ezért

$$u(x,a) = f(x) = v(x) + w(x,0), \tag{3.73}$$

amiből adódik, hogy

$$w(x,0) = f(x) - v(x). \tag{3.74}$$

Ezek alapján $w(x,t)$ függvény meghatározása ugyanúgy történik, mint az előző esetben az $u(x,t)$ meghatározása, csak az együtthatók meghatározásához nem az $f(x)$, hanem az $f(x) - v(x)$ függvényt kell Fourier-sorba fejteni.

4. fejezet

Kidolgozott szöveges példák

Ebben a fejezetben a tananyaghoz kapcsolódó és az órán részben vagy egészben elhangzott feladatok és azok megoldásai találhatóak. Nem minden egyenlet típushoz lehet, vagy sikerült megfelelő feladatot (ki)találni, de a legfontosabbakhoz talán elegendőek – ha csak kezdésnek is – az itt ismertetett feladatok. Vannak nagyobb problémák, melyek egy csoportba tartoznak, így nem a differenciálegyenlet fajtáknak megfelelően, hanem az adott probléma szerint csoportosítjuk a feladatokat.

4.1. Populációdinamikai modellek

4.1.1. Normális szaporodás egyenlete

Ebben az esetben azt feltételezzük, hogy az egyedszám (N) növekedésének mértéke az egyedszámmal arányos. Ez persze egy idealizált eset, amikor végtelen mennyiségű táplálék áll rendelkezésre, nincs ragadozó, vagy természetes úton történű egyedszám csökkenés. Feltehetnénk a kérdést, minek foglalkozunk egy olyan modellel, amely biztos nem írja le a populáció dinamikáját. Ez a kijelentés csak részben igaz. Egy olyan szeparált környezetben, ahol az egyedszámhoz képest a táplálék lényegében végtelen mennyiségben áll rendelkezésre és a ragadozókat kizárjuk, valamint olyan időtartamot választunk a vizsgálódásra, amely elég rövid az egyedek élethosszához képest, de elég hosszú a szaporodási ciklushoz képest, akkor ez egy releváns modell lehet. Ilyen eset elképzelhető egy baktériumtenyészet esetén.

Tehát, mint mondottuk, az egyedszám növekedési sebessége, azaz az egyedszám időbeli változása az egyedszámmal arányos. Ezt a következőképpen formalizálhatjuk:

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{4.1}$$

ahol k valamilyen arányossági tényező. Ez egy elsőrendű lineáris, homogén, kedzeti feltétel differenciálegyenlet, melyet a változók szétválasztásának módszerével meg lehet oldani:

$$\frac{dN}{N} = kdt \quad \text{integrálva} \rightarrow \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = k(t - t_0) \tag{4.2}$$

$$N = N_0 e^{k(t-t_0} \tag{4.3}$$

ahol a t_0 a kezdeti időpontot jelenti, az N_0 pedig a kezdeti egyedszámot. Ez az egyenlet és a megoldása nagyon hasonlít a bomlás egyenletére. A különbség annyi, hogy az exponenciálisban a kifejezésnek más az előjele. Az egyik esetben nő, a másik esetben csökken valaminek a száma.

4.1.2. A robbanás egyenlete

Most tegyük fel, hogy a szaporodás sebessége nem az egyedszámtól, hanem a párok számától függ, de a nemeket nem különböztetjük meg. Ekkor az egyenlet

$$\frac{dN}{dt} = kx^2 \tag{4.4}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$x = -\frac{1}{t - C} \tag{4.5}$$

alakban megadható, amiről látható, hogy már $t < \infty$ esetén is végtelenné válik.

4.1.3. Logisztikus megoldás

Ha figyelembe vesszük, hogy a táplálékért folyhat küzdelem, úgy az egyedszámmal arányos növekedés mellett egy a párok számával arányos csökkenést is be kell építeni. Ez nagyon egyszerű: legyen $k = const.$ helyett $k = a - bx$. Az előjel fontos, hisz az fejezi ki, hogy csökkenésről van szó. Így az egyenletünk:

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N. \tag{4.6}$$

Ekkor érdekes görbéket kapunk. A megoldás a

$$N = \frac{ae^{at}}{1 + be^{at}} \tag{4.7}$$

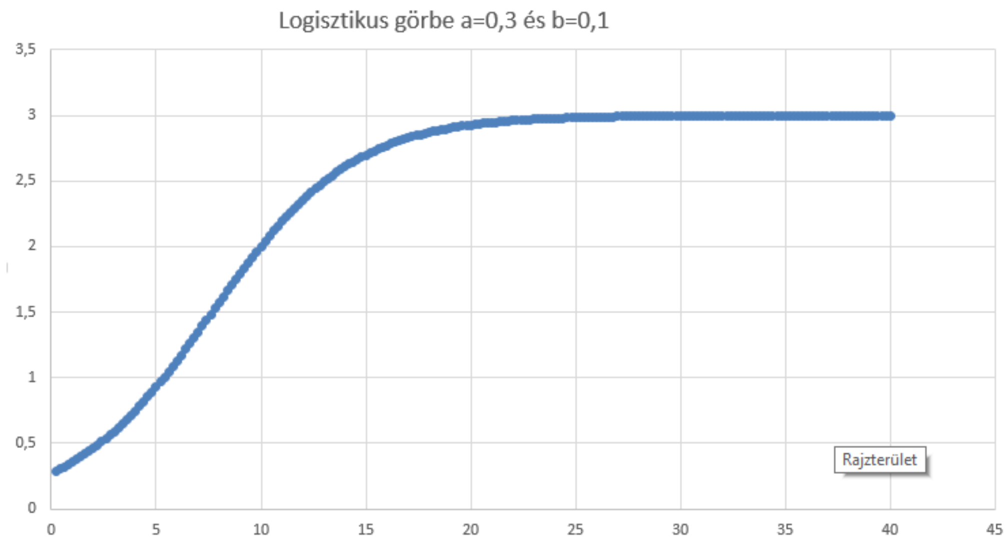
alakban írható. Ez a függvény a és b különböző értékeire ugyan másként viselkedik, de az *aszimptotikus*, azaz a nagy t-re vonatkozó viselkedésük ugyanaz: egy stabil értékhez tartanak, melyet a és b határoznak meg. Egy ilyenre példa a 4.1. ábra.

4.1.4. Halászati kvóta

Ha gazdasági szempontokat is figyelembe kívánunk venni. Ha a populációt nem hobbiból, hanem termelés céljából neveljük, akkor időnként szeretnék az állományt „lehalászni”. Ezt megtehetjük, ha a következő egyenlettel modellezett populációt vesszük:

$$\frac{dN}{dt} = (a - bx)x - c \tag{4.8}$$

azaz időközönként c mennyiséget veszünk el a populációból. Például, ha $a = b = 1$ akkor ez az egyenlet $c < \frac{1}{4}$ esetben szolgáltat stabil megoldásokat. Ha $c = \frac{1}{4}$ akkor csak a stabilitáshoz képest nagyobb egyedszámmal induló populáció áll be egy stabil értékre, míg ha $c > \frac{1}{4}$, akkor nem lehet elég nagy a populáció száma ahhoz, hogy a lehalászás miatt ki ne pusztuljon véges időn belül.



4.1. ábra.

4.1.5. Halászat relatív kvótával

Ha okosan bánunk a populációval, akkor figyelembe vesszük azt, hogy az egyedszámot kívülről befolyásoltuk, azaz a populáció méretéhez, egyedszámához igazítjuk a kvótánkat. Ezt a következő egyenlet írja le:

$$\frac{dN}{dt} = (a - bx)x - cx. \tag{4.9}$$

Ez visszaállítja a logisztikus esetben tárgyalt egyensúlyt úgy, hogy közben mi folyamatosan élvezzük a populáció hasznát.

4.1.6. Lotka–Volterra-modell

Az egyik legegyszerűbb modell két populáció kölcsönható dinamikájának leírására a Lotka–Volterra-modell. A következőket vesszük figyelembe: van egy préda faj, amelynek korlátlan mennyiségű tápláléka van és az egyedszámtól függ az egyedszám. Azonban jelen va egy ragadozó faj is, melynek egyetlen tápláléka a préda faj. A következő egyenletrendszer írja le a két populáció egyedszám változását:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx - axy \\ \dot{y} &= -ly + bxy \end{aligned} \tag{4.10}$$

Az első egyenlet első tagja fejezi ki, hogy a préda faj exponenciálisan szaporodik, a második tag ezt a szaporodást korlátozza azzal, hogy az egyedszám csökkenése arányos a préda faj – ragadozó faj párok számával. A második egyenlet első tagja azt fejezi ki, hogy a ragadozó faj magától kihalna az egyedszámmal arányos módon[1]. Azonban a ragadozó faj egyedszámát növeli a préda faj – ragadozó faj párok száma. Az egyik választható numerikus projekt ennek a modellnek az

[1] Ez az második egyenlet a $b = 0$ esetben a bomlás egyenlete (is).

elemzése lenne. Azonban konkrét számolás nélkül is el tudjuk képzelni, hogy a megoldás két egymással ellentétes fázisban lévő harmonikus függvény. Amint a préda egyedszáma megnő, egy kis idő múlva a ragadozó egyedszáma is megnő, eléri maximumát. Ezt a maximumot az határozza meg, hogy mikor kezdenek többet elejteni a ragadozók, mint ahogy azt a préda populáció pótolni tudja. Ekkor elkezd a préda egyedszám csökkenni, majd utána a ragadozóké is. Azonban ettől megint elindul a préda egyedszámának növekedése, s. í. t.

4.2. A légkör egyensúlya és a Brunt–Väisälä-frekvencia

4.2.1. A légkör egyensúlyi rétegzettsége

Azt szeretnénk meghatározni ebben a szakaszban, hogy milyen a légkör egyensúlyi rétegzettsége, azaz hogy változik a sűrűség a magasság függvényében. Az általános gáztörvényből kiindulva

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M_{\text{levegő}}RT} \\ p &= \rho\frac{R}{M}T \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vegyünk most egy kis térfogatelemet a légkörből. Legyen a tömege egységnyi. Miből származik a nyomás a térfogatelem alsó és felső lapja között? Természetes a gravitációs erőből. Így Δz vastag térfogatelemre felírhatjuk, hogy

$$\frac{p(z+\Delta z)-p(z)}{\Delta z} = -\rho(z)g = \frac{dp}{dz} \tag{4.12}$$

Felhasználva a (4.11) egyenletet a következőt írhatjuk

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gMp}{RT} \equiv -\frac{p}{H_0} \tag{4.13}$$

ahol bevezettük a $\frac{gM}{RT} = H_0$ konstanst. Ez egy elsőrendű differenciálegyenlet, amit a változók szétválasztásának módszerével meg lehet oldani és adódik, hogy

$$p(z) = p_0 e^{\frac{z}{H_0}}. \tag{4.14}$$

Vagyis a légkörben a nyomás exponenciálisan csökken.

4.2.2. Brunt–Väisälä-frekvencia

A Brunt–Väisälä-frekvencia az a frekvencia, amellyel az egyensúlyban lévő légkör egy kis térfogatelemét kiterítve rezeg. Ennek kiszámítása a következőképpen történik. Vegyünk egy m tömegű térfogatelemet, melynek alapterülete dA, magassága dz és sűrűsége a z_0 magasságon

$\rho(z_0)$. A dinamika alapképletéből kiindulva írhatjuk

$$\begin{aligned}\sum F &= ma_z \\ &= -mg \\ &= -\rho(z_0)gdzdA + p(z_0+z)dA - p(z_0+z+dz)dA \\ &= \left[-\frac{dp(z_0+z}{dz} - \rho(z_0)g\right]dzdA \\ &= (\rho(z_0+z) - \rho(z_0))\, gdzdA \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ez Arkhimédész-törvénye. A $-\rho(z_0)gdzdA$ súlya a z_0+z szinten kiszorított közeg $-\rho(z_0+z)gdzdA$ súlyával csökken. Vehetjük $dz \to 0$ esetet megint, így alakul ki, hogy

$$\begin{aligned}\sum F &= \frac{d\rho}{dz}|_{z_0} zgdzdA \\ ma_z &= -|\frac{d\rho}{dz}|gdzdAz \end{aligned} \tag{4.16}$$

A z előtt álló egész kifejezést elnevezhetjük egy konstansnak, mivel a felület és a magasság konstans marad és így az egyensúlyi légkörben a sűrűség változási is. Vagyis bevezetve az $N = \sqrt{\frac{g}{\rho_0}|\frac{d\rho}{dz}|}$ ún. Brunt–Väisälä-frekvenciát, adódik a

$$ma_z = m\ddot{z} = -Nz \tag{4.17}$$

egyenlet, mely a rezgőmozgás differenciálegyenlete és mint ilyen, tudjuk hogy egy valamilyen amplitúdójú és adott N frekvenciájú rezgést ír le.

4.3. Egyszerűbb szöveges példák

4.3.1. Tartályból kifolyó víz

Legyen egy H magasságú tartályban a víz szintje h. A tartály henger alakú, az alap sugara r. Egy ρ sugarú, kör alakú lyukon keresztül folyik ki a víz. Mennyi a kiürülés időtartama, ha egy folyadékelem sebessége $v = c\sqrt{2gh}$. (Miért is?)

A h távolságú víztükör süllyedési sebessége úgy aránylik a folyadékelem sebességéhez, mint a tartály alapterülete a kifolyó területéhez. Világos, hogy ha a kifolyó területe megegyezik a tartály területével, akkor egy csőről beszélünk és a folyadék szabadon esik. Ekkor a kiürülési sebesség a folyadékelem szabadesését jelenti, azaz $v = \sqrt{2gh}$.
Egyenletben megfogalmazva ezt

$$\frac{-\frac{dh}{dt}}{v} = \frac{\rho^2\pi}{r^2\pi} \tag{4.18}$$

Bevezetve a $\kappa = \frac{c\rho^2}{r^2}\sqrt{2g}$ konstanst adódik, hogy

$$\frac{dh}{dt} = -\kappa\sqrt{h} \tag{4.19}$$

Ez egy közönséges nemlineáris homogén differenciálegyenlet, melyet a változók szétválasztásának módszerével meg lehet oldani. Ugyanis

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= -\kappa\sqrt{h} \\
\frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\kappa dt \\
\text{Integrálva:}\quad 2\sqrt{h} &= -\kappa t + c' \\
\text{t-re rendezve:}\quad t &= -\frac{2\sqrt{h}}{\kappa} + c \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

A c integrálási konstans a kedzeti feltételből egyértelműen meghatározható. Ugyanis $t = 0$-ban $h = H$, így adódik, hogy $c = \frac{2\sqrt{H}}{\kappa}$. Vagyis

$$t = \frac{2}{\kappa}(\sqrt{H} - \sqrt{h}) \qquad (4.21)$$

A kiürülés a $h \to 0$ határesetet jelenti:

$$h \to 0 : t \to T = \frac{2\sqrt{H}}{\kappa} \qquad (4.22)$$

4.3.2. Tölcsérben kifolyó víz

Legyen egy tölcsér, melynek alakja csonkakúp. A csonkakúp kisebbik, $3a$ átmérőjű, kör alakú alapján át folyik ki a folyadék. A kúp magassága legyen $l = 50cm$, a kúp nyílásszöge $\alpha = 30°$. A kifolyási sebesség nyilván arányos az aktuális keresztmetszettel és a kifolyó $2a$ átmérőjével. Határozzuk meg a kifolyási időt.

Először is az aktuális keresztmetszet egyenletét kell meghatározni:

$$A(h) = 2\pi r(h). \qquad (4.23)$$

A sugár magasságfüggését geometriai megfontolásokból megkaphatjuk:

$$r(h) = a + h\tan\alpha \qquad (4.24)$$

Ezzel az egyenlet felírható

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= -\frac{a}{A(h)}\sqrt{2gh} \\
&= -\frac{a}{2\pi a + 2\pi h\tan\alpha}. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

A változók szétválasztásával és az egyenlet integrálásával adódik az eredmény

$$t = -\frac{2\sqrt{2}\pi h(3a + h\tan\alpha)}{3a\sqrt{gh}} + h_0 \qquad (4.26)$$

Nem nehéz belátni, hogy az integrálási konstans a kezdő magasságot jelenti.

4.3.3. Egyenletes kifolyás tartályból

Vegyük az előző feladatot, de most a meghatározandó az $A(h)$ függvény olyan esetre, hogy a kifolyási sebesség állandó legyen!

A vizsgálandó egyenlet tehát

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A(h)}\sqrt{2gh} \tag{4.27}$$

A kifolyási sebesség állandó, tehát

$$c = -\frac{a}{A(h)}\sqrt{2gh} \rightarrow A(h) = -\frac{a}{c}\sqrt{2gh}. \tag{4.28}$$

Bevezetve a $k = -\frac{a}{c}\sqrt{2g}$ állandót, adódik, hogy

$$A(h) = k\sqrt{h}. \tag{4.29}$$

4.3.4. Gömb mozgása súrlódó folyadékban

A súrlódó folyadékok elméletéből ismeretes lehet, hogy a gömb alakú testre a folyadékban való mozgás esetén a sebességgel arányos lassító hatású erő hat. Ezt a Stokes-törvény írja le:

$$F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta r v \tag{4.30}$$

ahol η a folyadék viszkozitása, r a mozgó gömb sugara, v a mozgó gömb sebessége. A feladat, hogy határozzuk meg a súrlódó folyadékban „szabadon” eső golyó sebességét!

A folyadékban „szabadon eső” test sebességét a mozgásegyenletből határozzuk meg. A golyóra két erő hat: a nehézségi erő és a súrlódásból származó csillapítás. Így a mozgásegyenletek a

$$ma = m\frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v \tag{4.31}$$

alakot öltik. Látható, hogy ez az egyenlet a változók szétválasztásának módszerével megoldható:

$$\frac{mdv}{mg - 6\pi\eta r v} = dt. \tag{4.32}$$

Az integrálás után kapjuk, hogy

$$-\frac{m\ln|mg - 6\pi\eta r v}{6\pi\eta r} = t + c \tag{4.33}$$

amelyből v-re rendezve adódik, hogy

$$v = \frac{1}{6\pi\eta r}\left(mg - e^{-\frac{1}{m}(6(t+c)\pi\eta r)}\right). \tag{4.34}$$

4.3.5. Oldat hígítása

Egy 100 literes tartályban egy sós oldat van, mely 8 gramm sót tartalmaz literenként. A tartályba 4 liter vizet engedünk be és 2 liter oldatot engedünk ki percenként. Mennyi só marad az oldatban egy óra múlva?

A tartályba dt idő alatt $4dt$ víz folyik be és $2dt$ folyik ki, ami $\frac{2x}{100+2t}dt[g]$ sót visz magával. Így a tartályban levő oldat sótartalmának változása

$$\frac{2xdt}{10+2t} = -dx \tag{4.35}$$

amiből

$$x = \frac{c}{50+t} \tag{4.36}$$

A kezdeti időpillanatban $x = 8$ volt, vagyis $c = 400$. Ebből adódik, hogy

$$x = \frac{400}{50+t}$$
$$x(t=60) = x_0 \approx 3,6\frac{g}{l} \tag{4.37}$$

4.3.6. A kemencéből kivett kenyér hűlése

A kemencéből kiveszünk egy kenyeret, amely 100°C-ról 60°C-ra 20 perc alatt hűl le. A levegő hőmérséklete állandóan 25°C. Mennyi idő alatt lesz a kenyér 30°C, ha a hűlés sebessége arányos a test és a környezete hőmérsékletének különbségével.

A hűlés sebessége a hőmérséklet időbeli változása:

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T-25)$$
$$dT = -\lambda(T-25)dt$$
$$\text{Integrálva:}\quad T(t) = ce^{-\lambda t} + 25 \tag{4.38}$$

A kedzeti feltételből adódik, hogy $t = 0: \quad c = 75$ és $t = 20: \quad \lambda = \frac{1}{20}\ln\frac{15}{7}$. Vagyis

$$t = \frac{20\ln 15}{\ln 15 - \ln 7} \approx 71\text{perc} \tag{4.39}$$

4.3.7. A radioaktív bomlás

Legyen egy kőzetmintában 100 mg ^{238}U és 14 mg ^{206}Pb, mely az uránbomlásból keletkezett és a kőzet keletkezésekor ($t = 0$) nem volt jelen. Az urán „felezési ideje”, azaz az az idő amíg az urán atommagok fele ólom lesz, $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ év [2]. Állapítsuk meg a kőzet korát az ismert adatokból, ha tudjuk, hogy az uránatommagok számának időbeli változása arányos a mintában

[2] Ez nem a felezési idő definíciója, de az uránsor többi tagjának felezési ideje elhanyagolható a fenti felezési idő mellett.

lévő uránatommagok számával!

Mivel a magok számának időbeli változása, sebessége a magok számával arányos, a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{4.40}$$

ahol λ neve bomlási állandó, és definíció szerint a felezési idővel a

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \tag{4.41}$$

kapcsolatban áll. A fenti egyenlet megoldását a változók szétválasztásának módszerével könnyen megkaphatjuk a

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{4.42}$$

alakban, ahol N_0 a magok kezdeti száma. Ezt a kedzeti feltételekből kell meghatározni, amelyet jelen esetben a tudott tömegszámokkal és mintában mért mennyiségekkel lehet megtenni. Egy egyszerű aránypár felírásával

$$\frac{206}{238} = \frac{14}{x} \to x = 16,17 \tag{4.43}$$

Azaz ekkora tömegű urán bomlott már el ólomba. Vagyis a kezdeti N_0, ha a mértet $N(t = most) = 100$-at veszünk, akkor $N(0) = 116,17$. Ebből a (4.42) egyenlet alapján

$$\frac{N(t)}{N(0)} = 0,86 = e^{-\lambda t}$$

$$t = -\frac{\ln 0,86}{\lambda} = \frac{\ln 0,86}{\frac{\ln 2}{4,5\cdot 10^9}} \approx 10^9 \tag{4.44}$$

Vagyis a kőzet kb. egymilliárd éve keletkezett.

4.3.8. Párolgás

Egy gömb alakú folyadékcsepp párolgása arányos a felszínével. Határozzuk meg az $r(t)$ függvényt, avagy hogyan változik időben a csepp sugara!

A térfogat változása tehát arányos a felszínnel:

$$\frac{dV}{dt} = -kA \tag{4.45}$$

Ezt a sugarakra kifejezve

$$\frac{4\pi}{3}\frac{d(r^3)}{dt} = -k4\pi r^2 \tag{4.46}$$

Elvégezve a deriválást a bal oldalon adódik

$$\frac{4\pi}{3}3r^2\frac{dr}{dt} = -k4\pi r^2 \tag{4.47}$$

Az egyszerűsítés után az egyenlet

$$dr = -kdt \to r = r_0 - kt. \tag{4.48}$$

4.3.9. Töltések mozgása

Egy elektromosan töltött felület pillanatnyi töltéssel arányos sebességgel veszíti el a töltését. Írjuk le a felület töltöttségét, mint az idő függvényét! Kezdetben a felületen $Q_0 = 10^{-3}$ C töltés volt. Mikor lesz $Q = 10^{-6}$ C a felület töltöttsége, ha az arányossági tényező értéke $k = 2,3$?

Mivel a töltésváltozás sebessége

$$\frac{dQ}{dt} \sim Q \tag{4.49}$$

ezért bevezetve a k arányossági tényezőt, az egyenletünk a következő alakot ölti:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \tag{4.50}$$

A változókat szeparálva integrálhatunk

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt \to \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = -kt \to Q = Q_0 e^{-kt}. \tag{4.51}$$

A kedzeti feltételből tudjuk, hogy $Q(t = 0) = Q_0 = 10^{-3}$. Az egyenletet t-re rendezve adódik, hogy

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) = \frac{1}{k}\ln 10^3 \approx \frac{6,9}{2,3} = 3 \tag{4.52}$$

4.3.10. Sótömb oldódása

Egy a sugarú gömb alakú sótömböt végtelen vízmennyiségű fürdőbe teszünk. Írjuk fel a koncentrációt a sógömbben, mint a sugár függvényét, ha tudjuk, hogy a felszínen $c(a) = s$ és a fürdőben a végtelenben $c(\infty) = 0$.

Mivel a sótömb gömb alakú, ezért a koncentráció sugárfüggése egyszerű:

$$dc = -\frac{k}{r^2}dr \tag{4.53}$$

ahol k arányossági tényező. Így az egyenlet

$$\frac{dc}{dr} = -\frac{k}{r^2} \tag{4.54}$$

amelynek megoldása

$$c = \frac{k}{r}. \tag{4.55}$$

A k tényező a peremfeltételekből kitalálható:

$$c(r = a) = \frac{k}{a} = s \tag{4.56}$$

azaz, $k = as$. Az aszimptotika is rendben van, hisz $\lim_{r\to\infty} \frac{as}{r} = 0$. A megoldás így

$$c = \frac{as}{r}. \tag{4.57}$$

4.4. Szabadesés

Most kicsit járjuk körül a szabadesés problémáját. A feladat egy részét már megbeszéltük a 2.3.2. példánál. Most még egy kicsit bonyolítunk a helyzeten azzal, hogy figyelembe vesszük a $g$függ a magasságtól és a szléességi foktól. Utóbbit rögzítve egy értékre, mondjuk Budapest szélességi körére, kapunk egy $g(h)$ függvényt. Kiszámolható a Newton-egyenletből, hogy

$$mg(h) = -\gamma \frac{mM_F}{(R_F + H)^2} \tag{4.58}$$

ahol $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$, M_F a Föld tömege, R_F a sugara. A már elmondottak szerint a következő egyenletre jutunk

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{c}{h^2} - k^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \tag{4.59}$$

ahol éltünk a $-\gamma M_F = c$ és $R + H = h$ helyettesítésekkel. A diffegyenlet így egy nemlineáris másodrendű inhomogén egyenlet lesz. Itt is a helyettesítsünk: $v = \dot{h}$. Mivel $v = v(h(t))$, ezért az egyenletünk a következő lesz:

$$v\frac{dv}{dh} + k^2v^2 = \frac{c}{h^2} \tag{4.60}$$

Ez egy Bernoulli-típusú differenciálegyenlet. Látható, hogy bár elsőrendű, de inhomogén, nem lineáris differenciálegyenlet. Azonban meg tudjuk oldani.

A Bernoulli-egyenlet általános alakja

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{4.61}$$

ahol $P(x), Q(x)$ x-nek valamilyen függvénye és $n \neq 0, 1$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = r(x). \tag{4.62}$$

Ezt visszavezethetjük egy lineáris inhomogén egyenletre ha az $y = z^{n-1}$ helyettesítéssel élünk. Ekkor ugyanis

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{4.63}$$

vagyis behelyettesítve adódik, hogy

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x). \tag{4.64}$$

Ezt a 2.2.4. szakaszban megbeszéltek alapján megoldhatjuk a

$$z = y^{1-n} = e^{(n-1)\int P(x)dx}\left(C_1 + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx\right) \tag{4.65}$$

vagyis az y megoldás megadható a

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C_1 + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx\right)^{\frac{1}{1-n}} \tag{4.66}$$

A mi esetünkben a szereposztás a következő:

$$\begin{aligned} P(h) &= k^2 \\ Q(h) &= \frac{c}{h^2} \\ n &= -1 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Behelyettesítve a (4.66) végképletbe a problémánkat

$$v = e^{-\int k^2} \left(y_0 + 2 \int \frac{c}{h^2} e^{2\int k^2} dh \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.68}$$

Rendhagyó módon most határozzuk meg y_0 értékét. Vegyük a légellenállás nélküli esetet és a $\frac{c}{h^2}$ helyett írjuk vissza g-t. Ekkor adódik, hogy

$$v(h) = \sqrt{y_0 + 2\int g} = \sqrt{y_0 + 2gh}. \tag{4.69}$$

Tehát ha $y_0 = 0$-t választunk, megkapjuk a jól ismert $v = \sqrt{2gh}$ kifejezést.

Folytassuk az integrál elvégzésével:

$$v = e^{k^2 h} \sqrt{2} \left(\frac{ce^{2k^2 h}}{h} - 2k^2 \mathrm{Ei}(k^2 h) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.70}$$

ahol az $\mathrm{Ei}(x)$ függvény, az ún. Exponenciális integrál nevű függvény[3]. Vizsgáljuk meg a megoldást $k^2 \to 0$ esetben. A zárójelben a második tag nullához, a zárójel szorzója egyhez tart. A zárójel első tagja pedig a

$$\lim_{k^2 \to 0} \sqrt{\frac{ce^{2k^2 h}}{h}} = \sqrt{2\frac{c}{h}} \tag{4.71}$$

Ne felejtsük el, hogy a $g(h) = \frac{c}{h^2}$. Ennek megfelelően adódik, hogy

$$\lim_{k^2 \to 0} : \quad v(h) \to \sqrt{2\frac{c}{h^2} h} = \sqrt{2gh} \tag{4.72}$$

Vehetjük azonban a nem nulla esetet is. Ha feltesszük, hogy a $k^2 << 1$, akkor sorba fejthetjük az $\mathrm{Ei}(x)$ függvényt:

$$\mathrm{Ei}(x) \approx -2k^2(\gamma \cdot h + 2\ln k) \tag{4.73}$$

ahol $\gamma \approx 0,57722$ az Euler-Mascheroni állandó[4]. A további számoláshoz ezt a lineáris közelítést használjuk. Azaz a $v(h)$ függvényünk

$$v(h) = \sqrt{2c}\sqrt{\frac{1}{h} - k^2\gamma h - 2k^2 \ln k}. \tag{4.74}$$

[3] Most nekünk nem érdekes a definíciója, de fellelhető például a http://mathworld.wolfram.com/ExponentialIntegral.html helyen.

[4] Szintén nem érdekes a definíció, de megtalálható itt: mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html .

Ahhoz, hogy a $h(t)$ függvényt megkapjuk, a $v(h(t)) = \dot{h}(t)$ egyenletet kell megoldani, azaz

$$\dot{h}(t) = \sqrt{2c}\sqrt{\frac{1}{h} - k^2\gamma h - 2k^2 \ln k}. \tag{4.75}$$

Ez egy nemlineáris elsőrendű inhomogén egyenlet, melynek zárt alakú megoldása nem létezik.

4.5. Rezgőmozgás

A másodrendű differenciálegyenletek esetében nagyon fontos speciális eset a rezgőmozgások leírása. A 2.3. fejezetben ezt részletesen tárgyaltuk. Ebben a fejezetben konkrét kidolgozott példákat találunk, melyek majd' mind a fizika témaköreiből merít.

4.5.1. Utazás a Föld középpontja felé ... és vissza

Ha Földünket egy homogén gömbnek tekintjük és fúrunk rajta keresztül egy lyukat és abba beleugrunk (miért is ne?), milyen mozgást végzünk? A válasz nem triviális. Ugyanis a egy homogén testben a gravitációs erőtér más szerkezetű, mint attól valamilyen távolságra[5].

Ismeretes, hogy a gravitációs erő a Földtől távolodva $\frac{1}{r^2}$ szerint csökken. De ha a Föld belsejében vagyok, akkor más a helyzet. Belátható, hogy a Földön kívűl a Föld vonzó hatása helyettesíthető egy olyan pontszerű test hatásával, amely a ugyanolyan tömegű, mint a Föld és éppen a Föld középpontjában van. Ha azonban a Földben, mint homogén testben vizsgáljuk a gravitációnak a Föld középpontjától mért távolságának függését, akkor nem a szokásos $\frac{1}{r^2}$ függést kapjuk. Ugyanis homogén eloszlású testben – mivel az erő forrása a tömeg – egy zárt gömböt felvéve a gömb felületén éppen a körülzárt tömeg fejti ki. Tehát a gömb térfogatában található tömeg adja a gravitációs erőt a gömbön. Vagyis, ha a gömböt kis gömbhéjakra osztjuk és tudjuk, hogy az adott tömegpontra csak az „alatta" lévő rész (azaz a $r \leq r_0$ sugarú gömbbe zárt tömeg) hat úgy, mintha az $r \leq r_0$ sugarú gömb által körülzárt gömböt a középpontban, egy tömegpontban egyesítettem volna. Ezen tömegpont tömege a körülzárt térfogatban lévő tömeg, azaz:

$$M = \rho\frac{4\pi}{3}r^3 \tag{4.76}$$

ahol ρ a bezárt anyag sűrűsége. Ha ezt behelyettesítjük a gravitációs törvénybe:

$$F = \gamma\frac{mM}{r^2} = \gamma\frac{4\pi m\rho}{3}r \tag{4.77}$$

azaz az F erő nagysága a távolsággal lineárisan nő. Számoljuk ki, hogy mi történik velünk, ha beleugrunk. A ránk ható erő:

$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{4\pi m\rho}{3}\mathbf{r} \tag{4.78}$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\gamma\frac{4\pi m\rho}{3}\mathbf{r} \tag{4.79}$$

[5]Az itt végig vezetett gondolatmenet pontos matematikai mása annak, amellyel az első Maxwell-egyenletet le lehet vezetni. Emögött a Gauss-tétel nevezetű matematikai megfontolás van, melyet nem fogunk most precízen vizsgálni.

Látható, hogy m-mel lehet egyszerűsíteni. Vezessük be a $\omega^2 = \gamma\frac{4\pi\rho}{3} = 1,54 \cdot 10^{-6}$ állandót! Ellenőrizhető, hogy ez éppen $\frac{1}{s}$ dimenziójú. Így az egyenletünk

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 x \tag{4.80}$$

Ez éppen a harmonikus mozgás egyenlete. Számítsuk ki a periódusidőt!

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1,54 \cdot 10^{-6}}} s = 5061.61 s \tag{4.81}$$

Vagyis $\sim$ 1.4 óra lenne, míg keresztül esnénk a Földön. A sebességünk maximumát a Föld középpontjában érnénk el. Vajon mennyi lenne ez az érték? Ha kezdősebesség nélkül indultunk, akkor az általános megoldás

$$x = R_F \cos(\omega t) \tag{4.82}$$

amiből a sebesség egy deriválással adódik

$$\dot{x} = R_F \omega \sin(\omega t) \tag{4.83}$$

amely függvénynek a maximuma $\dot{x}_{\max} = v_{\max} = R_F\omega$. Ha behelyettesítünk, akkor az első szökési sebességet kapjuk, nem egészen véletlenül:

$$\dot{x}_{\max} = v_{\max} = R_F\omega = 7,91 \frac{km}{s}. \tag{4.84}$$

4.5.2. Gravitációs metró

Az előző feladat egy érdekes alkalmazása lenne egy gravitációs metró megépítése: https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_train. Természetesen nem keresztül a Föld magján, de a kéregben elképzelhető lenne egy ilyesmi szerkezet. Az előző fejezetben tárgyalt leírás annyiban módosul, hogy ha el szeretnénk elkerülni a Föld középpontját, akkor az attól való eltérés szögének koszinuszával kell beszorozni az egyenletet.

- Vizsgáljuk meg különböző szögekre a metrószerelvény a_x azaz $\ddot{r}_x$ gyorsuláskomponensének függését az α szögtől, ahol α a pályatest és az adott pontban a Föld középpontja felé mutató erők hatásvonalainak szöge. (Amikor a Föld középpontjához legközelebb vagyunk akkor a bezárt szög 90°, vagyis a gyorsulás nulla. Ezt várjuk, hisz ekkor a gravitációs erő csak abban az irányban gyorsíthatna, amerre nem tud, azaz a pályatestre merőlegesen lefelé.)
- Számoljunk ki egy reális esetben a periódusidőt. Vegyük a pálya legmélyebb pontját 500 km-nek.

4.6. Rezgő húr

4.6.1. Alaprezgés és felharmonikusok

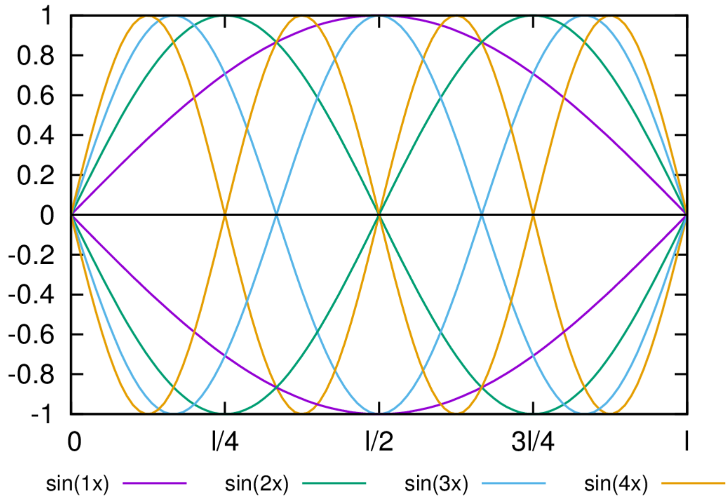
A húr alaprezgését leíró megoldást kapjuk, ha az $f(x) = 0$ kedzeti feltételt választjuk. Ekkor ugyanis $E_k = 0$ minden k-ra és

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\sin \frac{k\pi c}{l} t\right) \left(\sin \frac{k\pi c}{l} x\right). \tag{4.85}$$

Ennek a sornak az első tagja ($k = 1$):

$$u_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_1 \left(\sin \frac{\pi c}{l} t\right) \left(\sin \frac{\pi c}{l} x\right), \tag{4.86}$$

mely a húr alaprezgését állítja elő. Az alaprezgésnek az $x = 0$ és $x = l$ a csomópontjai, hullámhossza $2l$. Legnagyobb kitérése az $x = l/2$ felezőpontban van. A sor második tagja ($k = 2$) a húr első felharmonikusát adja. Ennek csomópontjai az $x = 0$, $x = l/2$ és $x = l$-ben vannak, hullámhossza l, a legnagyobb kitérése az $x = l/4$ és $x = 3l/4$ pontokban van. Hasonlóan minden k értékhez egy-egy felharmonikus tartozik, melyeknek a szakasz belsejében n számú csomópontjuk van és hullámhosszuk $\frac{2l}{n+1}$.



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
l/4
l/2
3l/4
l
sin(1x)
sin(2x)
sin(3x)
sin(4x)

Tárgymutató

állandó együtthatós differenciálegyenlet, 14
állandók variálásának módszere, 23

A próbafüggvény módszere, 27
ajánlott irodalom, 6
alaprezgés, 65

derivált, 9
differenciálási szabályok, 10
differenciálegyenlet integrálja, 15
differenciálegyenlet rendje, 13
differenciahányados, 8

explicit alakú differenciálegyenlet, 17

függvényegyütthatós differenciálegyenlet, 14
forrás, 23
Fourier-sor, 46

határérték, 7
határozatlan integrál, 10
határozott integrál, 11
homogén differenciálegyenlet, 14

inhomogén differenciálegyenlet, 14
integráló tényező, 24

közönséges differenciálegyenlet, 13
kezdeti feltétel, 15

Lagrange középérték tétele, 42
limesz, 7
lineáris differenciálegyenlet, 13

Newton–Leibnitz-szabály, 11

parciális differenciálegyenlet, 13
partikuláris megoldás, 15
próbafüggvény módszere, 37
primitív függvény, 10

reguláris megoldás, 15
rezgő húr differenciálegyenlete, 41
rezonancia, 27, 37

szinguláris megoldás, 15

Weierstrass-függvény, 10

zavaró függvény, 23, 27, 28, 37
zavarófüggvény, 37