

# Kvantumstatisztikai korrelációk kísérleti és elméleti vizsgálata nehézion-ütközésekben

Doktori értekezés

Lökös Sándor



Fizika Doktori Iskola  
Részecskefizika és csillagászat program

Iskolavezető: Prof. Dr. Gubicza Jenő, egyetemi tanár  
Programvezető: Prof. Dr. Katz Sándor, egyetemi tanár  
Témavezető: Dr. Csanád Máté, egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Budapest, 2020.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. A kvark-gluon plazma felfedezésének mérföldkövei</b>	<b>5</b>
2.1. Jet elnyomás . . . . .	5
2.2. Az elliptikus folyás és a skálaviselkedés . . . . .	7
2.3. A kezdeti hőmérséklet . . . . .	10
2.4. Az sQGP viszkozitásának mérése . . . . .	11
<b>3. Hidrodinamikai áttekintés</b>	<b>12</b>
3.1. A relativisztikus hidrodinamika alapegyenletei . . . . .	12
3.2. Néhány relativisztikus hidrodinamikai megoldás . . . . .	13
3.3. Hidrodinamikai modellek . . . . .	25
<b>4. Bose–Einstein korrelációs függvények</b>	<b>27</b>
4.1. A Bose–Einstein-korreláció és származtatása . . . . .	28
4.2. Kinematikai változók 3 és 1 dimenzióban . . . . .	29
4.3. A korreláció erőssége . . . . .	30
4.4. A korrelációs függvények Gauss- és Lévy-parametrizációja . . . . .	31
4.5. A paraméterek lehetséges fizikai interpretációja . . . . .	37
4.6. A Lévy-eloszlástól való eltérés vizsgálata . . . . .	41
4.7. A közelítések érvényessége . . . . .	42
<b>5. A Buda–Lund-modell és általánosítása</b>	<b>43</b>
5.1. A nem-relativisztikus Buda–Lund-modell . . . . .	44
5.2. A relativisztikus Buda–Lund-modell . . . . .	45
5.3. A Buda–Lund-modell általánosítása . . . . .	46
5.4. Mérhető mennyiségek az általánosított Buda–Lund-modellből . . . . .	48
5.5. Az általánosított Buda–Lund-modell és az önhasonló megoldások . . . . .	59
5.6. Összefoglalás . . . . .	62
<b>6. A Coulomb-kölcsönhatás Bose–Einstein-korrelációkban</b>	<b>63</b>
6.1. Coulomb-kölcsönhatással korrigált korrelációs függvény . . . . .	63
6.2. Illesztés numerikus táblázattal . . . . .	64
6.3. Parametrizált Coulomb-korrekció . . . . .	64
6.4. Összefoglalás . . . . .	69
<b>7. A Bose–Einstein korrelációs függvények mérése</b>	<b>70</b>
7.1. A PHENIX kísérlet . . . . .	70
7.2. Az adatszett és részecskeazonosítás . . . . .	73
7.3. Az egy- és kétrészecske vágások . . . . .	75
7.4. A páreloszlások mérése . . . . .	78
7.5. A korrelációs függvények és illesztésük . . . . .	80

---

7.6. Szisztematikus hibavizsgálat . . . . .	81
7.7. Eredmények 0-30% centralitású eseményekre . . . . .	87
7.8. Összefoglalás . . . . .	87
<b>8. A Lévy-paraméterek centralitásfüggésének vizsgálata</b>	<b>88</b>
8.1. Centralitásfüggő analízis célja . . . . .	88
8.2. A stabilitási index – $\alpha$ . . . . .	89
8.3. A korreláció erőssége – $\lambda$ . . . . .	91
8.4. A Lévy skálaparaméter – $R$ . . . . .	92
8.5. A paraméterek korrelációja és az $\hat{R}$ skálaparaméter . . . . .	92
8.6. Összefoglalás . . . . .	96
<b>9. A centralitásfüggés részletesebb vizsgálata</b>	<b>97</b>
9.1. Változások az előzetes eredményekhez képest . . . . .	97
9.2. Az új eredmények . . . . .	103
9.3. Összefoglalás . . . . .	113
<b>10.Összefoglaló</b>	<b>114</b>
<b>11.Köszönetnyilvánítás</b>	<b>116</b>

# 1. Bevezetés

„... a szép és a szellemi hogyan  
keveredik, és tulajdonképpen  
kezdettől fogva ugyanaz, vagyis más  
szavakkal: tudomány és művészet ...”

Thomas Mann, A varázshegy

Az Ősrobbanás utáni első néhány mikromásodpercben a Világegyetemet több billió fokos sűrű és forró anyag tölthette ki. Ebben a szélsőséges világban a kvarkok és a gluonok nem tudtak „összeállni” hadronokká, hanem szabadon léteztek egy színes plazma állapotban, melyet kvark-gluon plazmának nevezünk. Ahogy a Világegyetem tágult, úgy hűlt és ritkult, s végül a kvarkok és gluonok bezáródtak hadronbörtönükbe és létrejöttek a ma is megfigyelhető részecskék. A 2000-es évek óta kísérletileg is elő tudjuk állítani ezt a plazmát nagyenergiás nehézion-ütközésekben.

A RHIC gyorsítókomplexumot a long island-i Brookhaven National Laboratory-ban azzal a céllal is építették, hogy létrehozza a kvark-gluon plazmát, és tanulmányozza tulajdonságait. Ezt nehéz atommagokat ütköztetve, mini Ősrobbanásokat keltve lehet megtenni. Az anyag olyan tulajdonságait figyelhetjük így meg, melyek a Világegyetem kezdetekor lehettek jelen. A nehézion-ütközések után nagyon rövid ideig, néhány femtomásodpercig kialakul az a forró és sűrű anyag, melyet megolvadt nukleonok alkotnak, vagyis kvarkok és gluonok plazmája (az angol strongly interacting Quark Gluon Plasma elnevezésből rövidítve sQGP).

Mint azt később látni fogjuk, ez a plazma kísérletileg kimutathatóan a világ legtökéletesebb és legörvényesebb folyadék, melynek viszkozitása az elméletileg feltételezett minimumhoz közelebb. A kialakult plazma gyorsan tágul és hűl, és amikor a hőmérséklete eléri egy kritikus értéket, melyet a kísérleti adatok mellett rács-QCD számolásokból becsülhetünk, a kvarkok újra összeállnak kompozit részecskékké, s így újra hadronok jönnek létre, melyeket végül detektálunk és eloszlásaikból következtetünk a plazma tulajdonságaira.

Dolgozatomban a nehézion-ütközésekben, s általában a nagyenergiás fizikában is fontos módszert, az impulzuskorrelációs méréseket mutatom be. A korrelációs vizsgálatok teszik lehetővé nemcsak a rendszer méretének, de alakjának vizsgálatát is, míg a korrelációs függvény pontos alakjából a plazmában lejátszódó egyéb folyamatokra is következtethetünk.

A 2. fejezetben áttekintem a QGP felfedezéséhez vezető legfontosabb kísérleteket. Bemutatom, hogy hogyan lehetett a plazma hőmérsékletét, viszkozitását megmérni, folyadékjellegét kimutatni, mely lehetővé tette a hidrodinamikai modellezést.

A 3. fejezetben a QGP tökéletes folyadék voltát kihasználó, relativisztikus hidrodinamikai megoldásokat és a hidrodinamikai modellek általános felépítését tárgyalom. Az alapegyenletek levezetése után több megoldást is tárgyalok, köztük két olyat, melyek geometriai értelemben kapcsolatban állnak a később tárgyalt hidrodinamikai parametrizációval. Ezt bevezetendő bemutatom, hogy hogyan épül fel egy modell és hangsúlyozom a modellek és megoldások közötti különbségeket. A fejezet végén mérhető, kísérletileg megfigyelhető mennyiségeket tárgyalok.

A 4. fejezetben egy, a dolgozat szempontjából kiemelt mérhető mennyiségről ejtek szót: a Bose–Einstein korrelációs függvényről. E mérhető mennyiség központi szerepet játszik a femtoszkópiai kutatásokban. A femtoszkópia egy olyan nagyenergiás mag-, illetve részecskefizikai kísérleti technika, melynek segítségével a femtométer skálájú folyamatok téridőbeli szerkezetét kutathatjuk. Ebben a fejezetben vezetem be a dolgozatom második feléhez szükséges elméleti ismereteket és mutatom be a motivációkat. A Bose–Einstein korrelációs függvények Gauss-alakú parametrizációja mellett tárgyalom a Lévy-eloszlás fizikai rendszerekben való megjelenését és rámutatok paramétereinek lehetséges fizikai értelmezéseire, valamint az eloszlás alkalmazhatóságára a nagyenergiás korrelációs vizsgálatokban. Bevezetem az eloszlástól való kis eltérések vizsgálatára kifejlesztett módszert, a Lévy-sorfejtést.

Az 5. fejezetben egy ismert hidrodinamikai parametrizációt, a Buda–Lund-modellt általánosítom a korábbi ellipszoidális geometriát leíróról tetszőleges alakú forrást feltételezőre. Az általánosítás szükségességét kísérleti eredményekkel motiválom és a modellt részleteiben megvizsgálom. Megmutatom, hogy a modell keretei között a forrásnak mind a térbeli, mind a sebességtérbeli eloszlása általánosítható, s így a folyási koefficiensek leírása mellett az azimutális szögre érzékeny korrelációs sugarakat is ki lehet belőle számolni. Megmutatom azt is, hogy e két mennyiség az őket jellemző paramétereket együttesen befolyásolja. A fejezet végén megvizsgálom a modell analitikus megoldásokkal való lehetséges kapcsolatát.

A 6. fejezetben egy olyan számolást mutatok be, mely a korrelációs mérésekben detektált részecskepárok közötti végállapotú Coulomb-kölcsönhatást vizsgálja. Bemutatom a hatás eredetét, valamint kezelésének lehetséges módjait.

A 7.1. és 7. fejezetben bemutatom a PHENIX kísérletet és a részecskeazonosítás eredményeit. Kifejtem, hogyan lesz a detektált beütésekből olyan adatszett, amelyet feldolgozva a kvantumstatisztikai korrelációs függvények mérhetőek. Tárgyalom a mérés és a kiértékelés részleteit, majd részletesen elemzem a bizonytalanságot okozó tényezőket. Bemutatom a korábbi PHENIX kísérleti eredményeket, melyek megalapozását jelentik az általam elvégzett centralitásfüggő analízisnek, amelyeket a 8. és a 9. fejezetekben tárgyalok.

A 8. és a 9. fejezetben bemutatom a kísérleti eredményeimet. A PHENIX együttműködésben parametrizáltam kétrészecske Bose–Einstein korrelációs függvényeket Lévy-alakú forrást feltételezve. Megmértem az illesztett függvények paramétereinek transzverz tömegtől és centralitástól való függését és a paraméterfüggéseket elemeztem. Kimutattam, hogy a Gauss-alakú forrás feltételezése statisztikailag nem elfogadható. A Lévy-exponens mérésével megmutattam, hogy a forrás alakja függ a centralitástól, azonban a transzverz tömeg függvényeként állandónak tekinthető. A Lévy-eloszlás szélessége a kísérleti adatokban hasonlóan viselkedik, mint a Gauss-eloszlás szélessége. A korreláció erősségét mérve annak centralitásfüggetlenségét figyeltem meg és nem állandó viselkedését mutattam ki a transzverz tömeg függvényeként, mely olyan részecskefizikai folyamatok jele lehet, mint a parciális koherencia vagy részecskék közegbeli tömegmódosulása.

## 2. A kvark-gluon plazma felfedezésének mérföldkövei

A Világegyetem első mikromásodperceiben rendkívül sűrű és forró volt. Ilyen viszonyok között a kvarkok és a gluonok még nem alkottak hadronokat, szabadon léteztek. Ezt az állapotot kvark-gluon plazmának hívjuk. Az elnevezést E.V. Shuryak javasolta először [1] összefoglaló cikkében. Ezt a forró, körülbelül  $10^{12}$  K hőmérsékletű közeget ma nagyenergiás gyorsítóknak hozhatjuk létre nagyon rövid időre, mindössze  $\sim 10^{-24}$  másodpercre. Mára ismerté vált, hogy a kvark-gluon plazma nemcsak a legforróbb anyag a Világegyetemben, de a legtökéletesebb és a legörvényesebb folyadék is [2].

Ebben a fejezetben áttekintem a kvark-gluon plazma (sQGP), felfedezéséhez vezető utat, a mérföldköveknek tekinthető kísérleteket, melyek egy-egy új tulajdonságát világították meg ennek a különleges anyagnak.

### 2.1. Jet elnyomás

A kvark-gluon plazma első jelének a jet elnyomás vagy jet-quenching megfigyelése tekinthető [3]. Megfigyelték, hogy nehézion-ütközésben sokkal kevesebb nagy impulzusú töltött és semleges piont detektálnak, mint ami a proton-proton ütközésekben keletkezett részecskék számát skálázva várható volna. A kísérleti eredmény magyarázható egy, az ütközés során kialakuló forró és sűrű anyaggal, amivel a részecskék kölcsönhatnak, s így veszíthetik el az impulzusuk nagy részét. Az, hogy nem csak a töltött, hanem a semleges pionok is lefékeződnek azt mutatja, hogy a folyamatot az erős kölcsönhatás dominálja. A méréseket arany-arany ütközésekben végezték  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  GeV tömegközépponti energián, részecskéket körülbelül  $1 \text{ GeV}/c \leq p_T \leq 10 \text{ GeV}/c$  transzverz impulzustartományban figyeltek meg<sup>1</sup>.

#### 2.1.1. A magmódosulási tényező

A sűrű közeg hiányában a részecskék impulzuseloszlása a proton-proton ütközésekből skálázással adódik. E skálázással kapott eredménytől való eltérés mérésére vezették be az ún. *magmódosulási tényezőt*, melyet szemléletesen az

$$R_{AA} = \frac{\text{A mag-mag ütközésben keletkező részecskék száma}}{\text{A proton-proton ütközésben keletkező részecskék száma} \times \text{elemi ütközések száma}} \quad (1)$$

arányszám alakjában adhatunk meg. Tehát az  $R_{AA}$  mennyiség azt méri, hogy mennyivel kevesebb vagy több részecske keletkezik egy, például arany-arany atommagütközésben, mint amit a proton-proton ütközések alapján várnánk.

#### 2.1.2. A magmódosulási tényező értékét befolyásoló hatások

A magmódosulási tényező értékét több hatás együttesen befolyásolja. Az (1) definíció alapján látható, hogy az  $R_{AA} = 1$ , ha pontosan annyi részecske keletkezik az ütközés során, mint

<sup>1</sup>A transzverz impulzus a transzverz síkban, azaz a nyalábirányra merőlegesen mért impulzus. Hasonló mennyiség a transzverz tömeg:  $m_T = \sqrt{p_T^2 + m^2}$ , ahol  $m$  a részecske, pl. pion tömege.

amennyi a proton-proton ütközésekből várható. Ez azt jelenti, hogy nincs semmilyen magmódosulás. Ismertek azonban effektusok, amelyek miatt  $R_{AA} \neq 1$ . Kisebb impulzusoknál,  $p_T < 2$  GeV/c esetén  $R_{AA} < 1$ , aminek az oka, hogy a részecskekeltés leginkább a résztvevők számával skálázik, ahogy azt több kísérletben is megerősítették [4–6]. Nagyobb impulzusokra,  $p_T > 2$  GeV/c esetén p+A rendszerben ismert a Cronin-effektus, amelyet proton-nukleon ütközésekben fedeztek fel [7]. Megfigyelték, hogy a proton-nukleon ütközésekben a részecskék transzverz impulzusspektruma nagyobb impulzusok felé tolódik a proton-proton ütközésekhez képest, azaz proton-nukleon ütközésekben több nagyimpulzusú részecske keletkezik, mint proton-proton ütközésekben. A jelenséget a protonbeli partonok és a nukleonból származó partonok többszörös szórásával magyarázták. A Cronin-effektus hatására az  $R_{pA} > 1$  lesz. Hasonló rendszer a deuteron-arany ütközésekben kialakuló is, melyre a mért  $R_{dA} > 1$  az 1. ábrán láthatjuk a 3 GeV/c  $< p_T < 6$  GeV/c tartományon. A kísérlet során figyelembe vették a parton árnyékolást is, azaz a magban kötött nukleonokon belüli kvarkok impulzuseloszlásának változását a rendszám függvényében, melyet ugyan lepton-mag rendszerekben figyeltek meg [8,9], azonban  $p + A$  és  $A + A$  rendszerekben is lehet szerepe és módosíthatja a bináris skálázást.

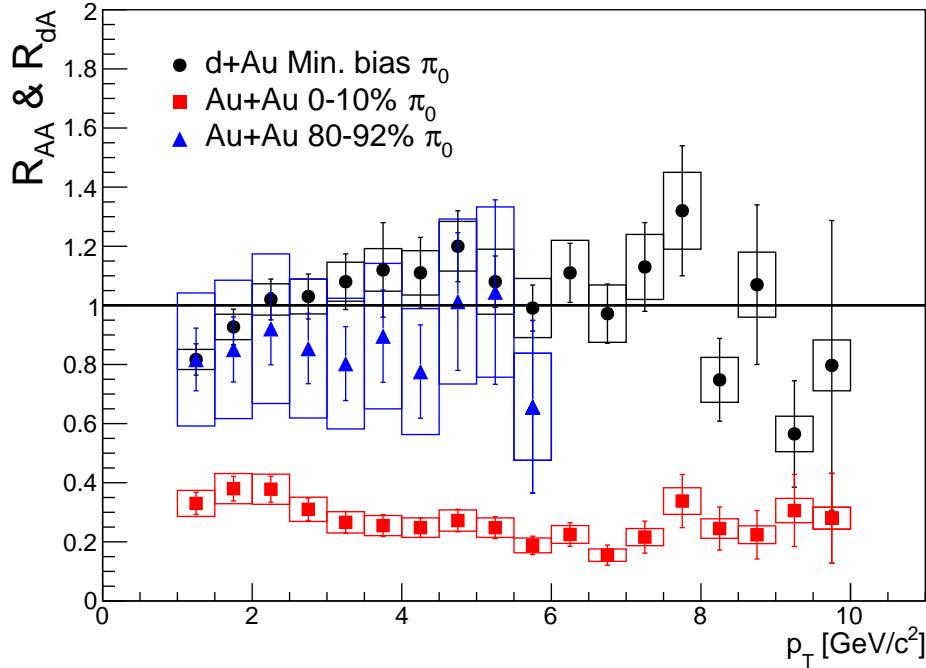
Mindezeket a hatásokat együttesen kellett figyelembe venni a nukleon-nukleon ütközésekben mért  $R_{AA}$  eredmények értelmezésekor.

### 2.1.3. Eredmények

Megfigyelték, hogy a periférikus ütközések esetén  $p_T \approx 2$  GeV/c impulzustartományban  $R_{AA} \approx 1$  töltött hadronok és semleges pionok esetén is, vagyis annyi részecskét detektáltak, amennyi proton-proton ütközések alapján várható volt. A centrális esetben azonban elnyomást találtak. A megfigyelt  $R_{AA}$  értékek  $p_T > 2$  GeV/c felett is kisebbek maradtak, mint 1, holott az előző szakaszban kifejtett Cronin-effektus miatt  $R_{AA} > 1$  lenne, ha nincs magmódosulási folyamat. A mérést megismételték úgy, hogy a centrális ütközésekben kapott hozamot a periférikus ütközésekben kapotthoz hasonlították, melynek mérőszámát  $R_{CP}$ -vel jelölik. Az  $R_{AA}$  esetén megfigyelt effektust ezzel a mérőszámmal is kimutatták: a centrális ütközésbeli nagy impulzusú részecskék száma kevesebb, mint amennyit a periférikus ütközésekben mértek, ami annak a jele, hogy centrális ütközésekben létrejöhet egy olyan közeg, amely lefékezi az erős kölcsönhatásban résztvevő részecskéket, ezzel csökkentve impulzusukat, míg ez a közeg nem vagy csak kis térfogatban alakul ki a periférikus ütközésekben. A vizsgálat kiterjedt a spektrumok mérésére is. A periférikus ütközésekből származó részecskehozamok konzisztensek voltak a proton-proton ütközések alapján vártakkal, míg a centrális ütközésekben mért hozamok szisztematikusan a proton-proton ütközésekből jóslott görbe alatt helyezkedtek el [3,10]. A különböző rendszerekben mért  $R_{AA}$  és  $R_{dA}$  értékek az 1. ábrán láthatóak.

### 2.1.4. A deuteron-arany ellenpróba

Az 1. ábrán bemutatott jet elnyomást többféleképpen lehet magyarázni. Az egyik magyarázat a kvark-gluon plazma kialakulása, melyben a nagyimpulzusú, erősen kölcsönható részecskék lefékeződnek. Azonban más magyarázatok is lehetségesek, de ezek kisebb rendszerekben, mint például a p+A vagy d+A is jóslták a jelenséget. A RHIC-nél ezért végeztek d+Au ütközéseket



1. ábra. Az  $R_{AA}(p_T)$  és a  $R_{dA}$  mérések eredményei semleges pionok esetén a PHENIX kísérlet-nél [10, 11]. Az eredmények hasonlóak töltött hadronok esetén is, ami azt bizonyítja, hogy az elnyomást az erős kölcsönhatás hozhatja létre. A konstans vonal a bináris skálázásnak megfelelő  $R_{AA} = 1$  értéket jelzi.

és meghatározták az  $R_{dAu}$  értékeket [10]. A kvark-gluon plazma keletkezésével nem számoló magyarázatok szerint a d+Au rendszerben  $R_{dAu} < 1$  értékeket kellett volna mérni.

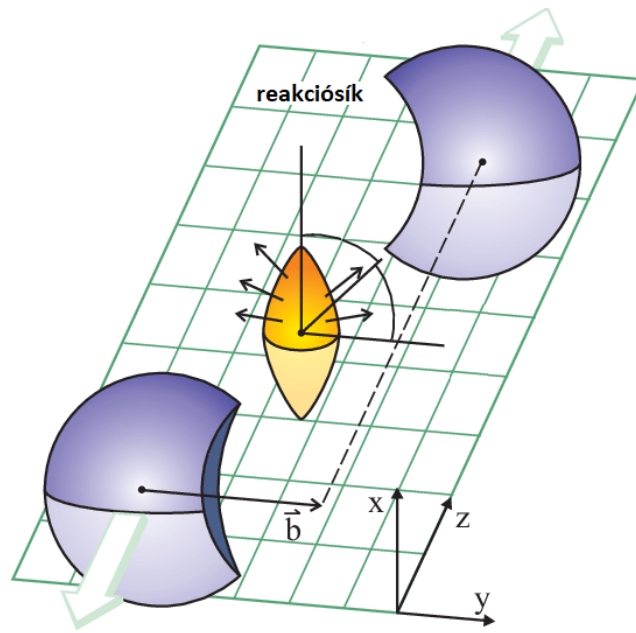
Az 1. ábrán jól megfigyelhető, hogy az  $R_{dA}$  értéke a semleges pionokra a plazma létezését alátámasztó viselkedést mutat:  $p_T < 2$  GeV/c alatt a nukleonszámmal való skálázás miatt  $R < 1$ ,  $p_T > 2$  GeV/c felett a Cronin-effektus miatt  $R > 1$ . Ezen eredmények kizárják az olyan magyarázatokat, mint a kezdeti állapotbeli parton szaturációból [12] vagy a végállapotbeli hadron kölcsönhatásból [13] eredő effektusok, melyek a d+Au rendszerben is jósnak jet elnyomást.

## 2.2. Az elliptikus folyás és a skálaviselkedés

A kvark-gluon plazma létezését erősítette meg az ún. *elliptikus folyás* és skálaviselkedésének megfigyelése. A  $v_2$  elliptikus folyás a részecskék impulzuseloszlásának azimutális anizotrópiáját jellemző paraméter:

$$\frac{dN(p_T, \phi)}{d\phi} \sim 1 + \sum_n v_n \cos(n(\phi - \Phi_{RP})), \quad (2)$$



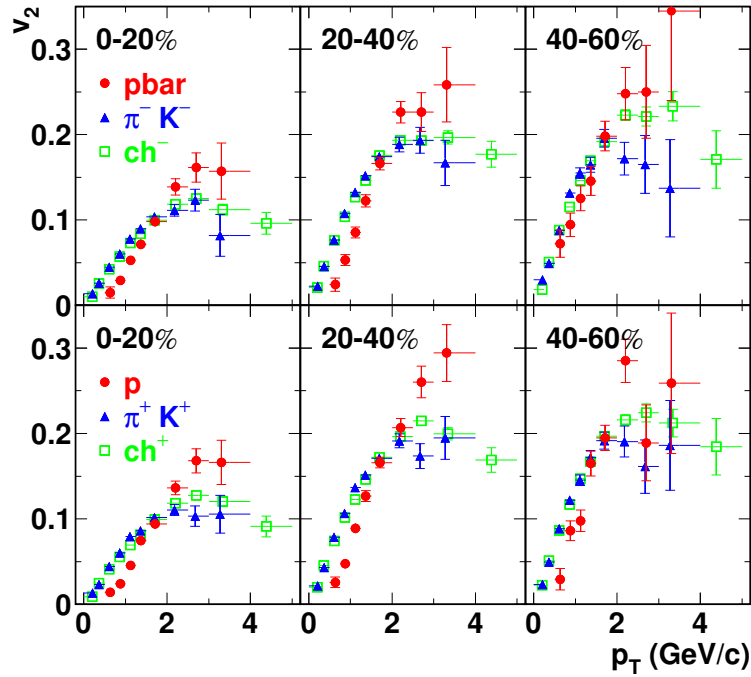


2. ábra. A nem-centrális ütközésekben az átfedő régió ellipszoidális szimmetriával közelíthető. (Az ábra [14] alapján készült.)

ahol  $N(p_T, \phi)$  az invariáns impulzuseloszlás,  $p_T$  a transzverz impulzus,  $\phi$  az azimuttszög,  $\Phi_{RP}$  pedig a reakciósík szöge. A folyási paraméterekkel részletesebb a 3. fejezetben foglalkozom. Ha a forrás gömbszimmetrikus, akkor az impulzuseloszlás is gömbszimmetrikus vagyis minden  $v_n$  koefficiens zérus. Ha a forrás geometriája bonyolultabb, például egy ellipszoiddal írható le, akkor ez a szimmetria az impulzuseloszlásban is meg fog jelenni, vagyis  $v_2 \neq 0$  lesz. Egy ilyen ellipszoidális rendszer látható a 2. ábrán, amelyen az is megfigyelhető, hogy leginkább olyan eseményekben lesz  $v_2$  jelentős, ahol a magok nem pont szemben ütköznek össze.

### 2.2.1. Az elliptikus folyás

A  $v_2$  az ütközés után kialakuló rendszer kezdeti, térbeli aszimmetriájából ered, arra érzékeny, s a részecskék közegbeli ütközései révén mérhető impulzustérbeli aszimmetriát eredményez. Az elliptikus folyás a forrás kezdeti térbeli aszimmetriájából alakul ki, a nem-centrális ütközésekben nagyobb az értéke, mint a centrális ütközésekben, amint ez a 3. ábrán és a [15] PHENIX publikációban is látható. Az adatokat olyan hidrodinamikai modellel hasonlították össze, mely táguló, termalizálódott közeget feltételez [16]. Ezzel le tudták írni az adatokat [15]. A  $v_2(p_T) \neq 0$  értékeket, vagyis impulzustérbeli aszimmetriát már az AGS [17, 18] és az SPS gyorsítóknál is mérték [19–21].



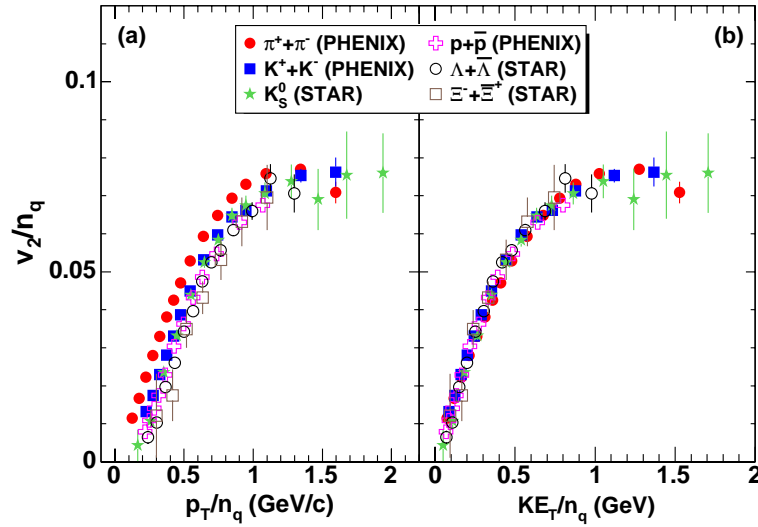
3. ábra. A  $v_2$  paraméter centralitásfüggése a PHENIX detektornál mért Au+Au ütközésekben  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV energián [15].

### 2.2.2. Az elliptikus folyás skálaviselkedése

Az elliptikus folyás megfigyelése és adatokkal való összehasonlítása megerősítette azt az elképzelést, miszerint a kialakuló közeg egy majdnem tökéletes folyadék [22]. A PHENIX és a STAR kísérletekben azonban azt is kimutatták, hogy a  $v_2$  skálaviselkedést mutat [23]. Mindkét kísérletben különböző részecskefajták  $v_2$  értékeit mérték a  $p_T$  és a  $KE_T$  függvényében. Előbbi a transzverz impulzus, utóbbi a transzverz kinetikus energia:  $KE_T = m_T - m$ , ahol  $m_T$  a transzverz tömeg. A skálaviselkedés az utóbbi változóban a leglátványosabb. A skálaviselkedés itt azt jelenti, hogy az adatpontok akkor esnek egy görbére, ha nem a  $v_2(KE_T)$ -t, hanem a  $v_2/n_q(KE_T/n_q)$  mennyiséget ábrázoljuk, ahol  $n_q$  a kvarkok száma az adott részecskében, azaz  $n_q = 2$  mezonokra,  $n_q = 3$  barionokra. Ezen eredmények láthatóak a 4. ábrán.

Ezt a skálázást olyan hidrodinamikai modellek jósolták, melyek az ütközésben létrejött közeget tökéletes kvarkfolyadéknak tekintették [24, 25]. A modellek jóslata szerint a  $v_2$  aránylag bonyolult függése a transzverz tömegtől, a centralitástól<sup>2</sup>, a rapiditástól, a részecsketípustól, stb. egy függvénnyé skálázható. Ezt a viselkedést a PHENIX-nél kimutatták [23].

<sup>2</sup>A centralitás az ütközés impakt paraméterének és az atommagok átmérőjének arányaként értelmezhető. Ha 0% egy esemény centralitása, akkor az atommagok pont szembetalálták egymást, ha 100% akkor pont elkerülték egymást. Vele egyenértékű mennyiség az  $N_{\text{part}}$  szám, ami a participánsok, azaz a reakcióban résztvevő nukleonok számát méri. Minél nagyobb ez a szám, annál centrálisabb az esemény. Az  $N_{\text{part}}$  számot Glauber-modellen alapuló szimulációkból számolják (ld. pl. [26]).



4. ábra. A  $v_2/n_q$  skálázás a skálázott transzverz impulzus ( $p_T/n_q$ ) és a skálázott transzverz kinetikus energia ( $KE_T/n_q$ ) függvényében [23]. Az eredmények kvark szabadsági fokok megjelenésével értelmezhetőek.

### 2.3. A kezdeti hőmérséklet

Az előző részekben tett megfigyelések arra utaltak, hogy kellően nagy energiás mag-mag ütközésekben egy forró, sűrű, táguló hidrodinamikai közeg jön létre. A folyadék az erős kölcsönhatásban résztvevő részecskéket lelassítja, így okozva a jet-elnyomás jelenségét, míg az erősen nem kölcsönható részecskékre, mint például a fotonok, nincs hatással. A  $v_2$  mérésekből kiderült, hogy a közeg gyorsan termalizálódik, így a fotonok tulajdonképpen egy termalizált közegben, a tágulás során folyamatosan keletkeznek. Kétféleképpen jöhetnek létre fotonok: közvetlenül az ütközés után az anyagban, vagy az anyagból keletkezett részecskék bomlástermékeiként; eszerint megkülönböztetünk direkt és bomlásból származó fotonokat. A termalizálódott közegről az információt a direkt fotonok hordozzák, így azok eloszlását érdemes mérnünk ha a közeg termikus tulajdonságairól szeretnénk információt szerezni. Ezt a hőmérsékleti eloszlást mérve következtethetünk a kezdeti hőmérsékletre.

Nehézséget jelent azonban, hogy a direkt fotonok mindössze  $\sim 10\%$ -át teszik ki a detektáltaknak. Figyelembe véve azonban az ismert rezonanciák bomlási csatornáit és azok kinematikáját, különböző szűrésekkel, vágásokkal ez az arány javítható. A PHENIX kísérletben elektron-pozitron párokat mértek az  $1 < p_T < 5$  GeV/c impulzustartományban [27]. Olyan párokat válogattak, melyekre teljesült az  $m_{e^+e^-} < 0.3$  GeV/ $c^2$  feltétel, így csökkentették a nem-direkt fotonok fő forrásának járulékát, a semleges pion kétfotonos bomlási csatornáját:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ .

Ezen mérésekből az adatokra egy termális eloszlásfüggvényt illesztve az inverz meredekség meghatározható. Ez arany-arany rendszer esetén  $T = 221 \pm 19^{\text{stat}} \pm 19^{\text{syst}}$  MeV-nek adódott<sup>3</sup>. Ha a mért direkt fotonok termális eredetűek, akkor  $T$  inverz meredekség és  $T_{\text{kezd}}$  kezdeti hőmérséklet között kapcsolat van. Hidrodinamikai modellekből  $T$  értéke alapján  $T_{\text{kezd}} \approx 300 - 500$

<sup>3</sup>Az „1 eV = 11600 K” átváltási szabályt alkalmazva  $T \approx 2,6 \cdot 10^{12}$  K adódik.

MeV<sup>4</sup>. A rács-QCD számolások  $T \approx 170$  MeV hőmérsékleten egy hadron→kvark-gluon plazma fázisátmenetet jósolnak, így ezek a mérési eredmények megerősítik a sejtést, miszerint az megfigyelt anyag kvarkok és gluonok plazmája <sup>5</sup>.

## 2.4. Az sQGP viszkozitásának mérése

Az sQGP viszkozitását közvetve a nehéz kvarkok  $R_{AA}$  és  $v_2$  mérésével lehet meghatározni. Az mérési eredményeket modellszámolásokkal kell összehasonlítani. PHENIX-nél olyan elektronokat mértek, melyek bomlástermékei lehettek  $c$  és  $b$  kvarkoknak [29]. A mérésből világossá vált, hogy a nagyimpulzusú nehéz kvarkok is elnyomódnak, csakúgy, mint a könnyűek ( $u$ ,  $d$  és  $s$ ) és a belőlük származó  $v_2$  folyások sem nullák. Azon perturbatív QCD-n alapuló modellekből, melyek reprodukálni tudták az adatokat (pl. [30]), meghatározható volt a plazma diffúziós állandója, melyből kifejezhető a kinematikai viszkozitás:

$$D = \frac{\eta}{\epsilon + p} \quad \text{és} \quad \epsilon + p = Ts \quad \Rightarrow \quad DT = \frac{\eta}{s}. \quad (3)$$

A kinematikai viszkozitás értéke így, modelfüggően  $\frac{\eta}{s} \approx (1 - 2) \frac{\hbar}{4\pi}$  érték körül adódott, ahol  $\frac{\hbar}{4\pi}$  az adS/CFT korrespondenciából származó sejtés az elméleti minimumra.

---

<sup>4</sup> $T_{\text{kezdeti}} \approx 3,5 \cdot 10^{12} - 5,8 \cdot 10^{12}$  K. A kezdeti hőmérséklet értéke a modell részleteitől függ (pl. [28])

<sup>5</sup> $T_{\text{QCD}} \approx 2 \cdot 10^{12}$  K.

### 3. Hidrodinamikai áttekintés

A kísérleti eredmények tehát arra engednek következtetni, hogy az sQGP tökéletes folyadékként viselkedik: a viszkozitása az elméleti minimumhoz közeli és hidrodinamikai skálaviselkedést mutat. Ezért a plazma időfejlődése során a termalizáció és a kifagyás közötti szakasz a relativisztikus hidrodinamika alapegyenleteivel leírható. Ezen egyenletekre nehéz olyan megoldást találni, mely a kísérleti körülményeket tükrözi. Egy realiztikus megoldás 3+1 dimenziós, gyorsuló és tetszőleges állapotegyenlet mellett megoldás marad. A fejezet első felében levezetem a relativisztikus hidrodinamika alapegyenleteit és áttekintek néhány olyan megoldást, mely a dolgozat szempontjából fontos.

A fejezet második felében bemutatom a hidrodinamikai modellek általános felépítését és a belőlük származtatható mérhető mennyiségeket. A hidrodinamikai modellek nem megoldásai a relativisztikus hidrodinamika egyenleteinek, hanem a végállapotot parametrizálják egy forrásfüggvénynek nevezett eloszlással. Ebből az eloszlásfüggvényből lehet a mérhető mennyiségeket kiszámítani. Az 5. fejezetben az itt bemutatott eredmények segítségével általánosítom az egyik ismert hidrodinamikai modellt.

#### 3.1. A relativisztikus hidrodinamika alapegyenletei

A relativisztikus hidrodinamika alapegyenleteit először L.D.Landau vezette le és oldotta meg [31]. Az egyenletek levezetéséhez lokális termodinamikai egyensúlyt feltételezünk. Nehézion-ütközésekben a termalizálódott plazmában ez a feltétel teljesül.

A folyadékelem sebességét a következőképpen definiáljuk:

$$u_\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{v}) \quad (4)$$

ahol  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$  a Lorentz-faktor,  $\mathbf{v}$  pedig a folyadékelem hármass sebessége. A sebesség négyesvektorként Lorentz-transzformálódik, a négyzete pedig skalárként. A normálási feltétel a négyessebességre

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (5)$$

A hidrodinamikában a sebesség általában a  $(t, x, y, z)$  koordináták függvénye, csakúgy, mint a termodinamikai mennyiségek.

A kontinuitási egyenlet a részecskeszám megmaradást fejezi ki. Bevezetve a  $J^\mu = nu^\mu$  megmaradó áramot

$$\partial_\mu (nu^\mu) = \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (6)$$

alakban írható, ahol  $u^\mu$  a fenti módon értett sebesség,  $n$  a részecskeszám és  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Ez az egyenlet tehát  $J^\mu$  négyesvektor megmaradását fejezi ki, amelynek  $J^0 = nu^0$  0. komponense a részecskesűrűség,  $\mathbf{J} = n\mathbf{v}$  pedig a részecske fluxus.

Az energia- és impulzusmegmaradás négy lokális megmaradó egyenlettel írható le, melyet az energia-impulzus tenzorral fejezhetünk ki, amit a

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} \quad (7)$$

alakban írhatunk. Az izotrópiából következően a nyugalmi rendszerben az energia-impulzus tenzor szimmetrikus. A relativisztikus hidrodinamika energia-, illetve Euler-egyenlete a  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$  alakban adható meg:

$$\begin{aligned}\partial_\nu T^{\mu\nu} &= \partial_\nu((\epsilon + \kappa)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}) = \\ &= u^\mu u^\nu \partial_\nu(\epsilon + p) + (\epsilon + p)u^\mu \partial_\nu u^\nu + (\epsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^\mu - \partial_\mu p = 0\end{aligned}\quad (8)$$

Ebből az energiaegyenletet  $u^\mu$ -vel való projekcióval kapjuk meg:

$$u^\nu \partial_\nu \epsilon + (\epsilon + p)\partial_\nu u^\nu = 0, \quad (9)$$

az Euler-egyenletet pedig a merőleges,  $(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)$ -vel vett projekcióval:

$$(\epsilon + p)u^\mu \partial_\mu u^\nu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)\partial_\mu p. \quad (10)$$

E két egyenlet a (6) kontinuitási egyenlettel együtt a relativisztikus hidrodinamika egyenletei.

### 3.2. Néhány relativisztikus hidrodinamikai megoldás

Ebben a szakaszban néhány történetileg és az alkalmazások szempontjából fontos relativisztikus hidrodinamikai megoldást tekintek, a teljesség és a részletesség igénye nélkül.

#### 3.2.1. Landau–Khalatnyikov-megoldás

Landau javasolta elsőként a relativisztikus hidrodinamika alkalmazását nagyenergiás folyamatok, első sorban légköri proton-proton ütközések leírására. Ő vezette le a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit és az előbbi alkalmazásra egy megoldást is talált [31]. A proton-proton ütközések jellegéből fakadóan nem volt szükséges 3+1 dimenziós megoldást felírni, így a Landau–Khalatnyikov-megoldás csak 1+1 dimenziós.

A megoldásban a (7) egyenletet áttranszformálták a

$$u_\mu \frac{\partial(Tu_\nu)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial T}{\partial x_\nu} = 0 \quad (11)$$

alakra. Mivel a vizsgált tartományban az ütköző részeket lapított korongnak lehet tekinteni, ezért elegendő csupán két koordinátával foglalkozni (melyek a  $t$  és a  $z$  koordináták):

$$\frac{\partial(Tu_1)}{\partial x_4} + \frac{\partial Tu_4}{\partial x_1} = 0. \quad (12)$$

Vezessük be a relativisztikus hidrodinamika egydimenziós mozgásának potenciáljaként a  $\phi$  függvényt amivel

$$Tu_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad Tu_4 = \frac{\partial \phi}{\partial x_4}, \quad (13)$$

ahol  $\phi$  kielégíti a

$$d\phi = Tu_4 dx_4 + Tu_1 dx_1 \quad (14)$$

relációt. Ha bevezetjük  $t$ -t  $x_4$  helyett,  $u_0 = 1/\sqrt{1-v^2}$ -et az  $u_4$  helyett és az  $x$ -et az  $x_1$  helyett, akkor a

$$d\phi = -Tu_0 dt + Tu_1 dx \quad (15)$$

kifejezést kapjuk. Definiáljuk a sebességet az  $u_0$  és  $u_1$

$$u_1 = \sinh \alpha, \quad u_0 = \cosh \alpha \quad (16)$$

választással. Elvégezve egy Legendre-transzformációt  $T$ -ben,  $\alpha$ -ban a következő potenciál adódik:

$$d\chi = d(\phi + Tu_0 t - Tu_1 x). \quad (17)$$

Mindezen átalakításokkal a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + (c_0^2 - 1) \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

ahol  $y = \ln T/T_0$ . További egyszerűsítés a  $3p = \epsilon$  és  $c_0^2 = 1/3$  kikötés, vagyis itt a  $\kappa = 3$ , azaz konstans:

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Új változókat bevezetve és a matematikai átalakításokat elvégezve adódik egy megoldás, mely, bevezetve az

$$\ln \frac{t+x}{\Delta} = \tau, \quad \ln \frac{t-x}{\Delta} = \eta \quad (20)$$

kifejezéseket (ahol  $\Delta$  a Lorentz-kontrakciót szenvedett magok vastagsága) és figyelembe véve a Stefan-Boltzman-határesetet ( $\epsilon \sim T^4$ ):

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp \left[ -\frac{4}{3} (\eta + \tau - \sqrt{\eta\tau}) \right]. \quad (21)$$

alakban áll elő.

### 3.2.2. Hwa–Bjorken-megoldás

A Hwa-Bjorken megoldás [32,33] is 1+1 dimenziós, longitudinális, de explicit, ami az alkalmazás szempontjából előnye a Landau-Khalatnikov megoldással szemben.

A megoldáshoz Hwa az energia-impulzus tenzort és a megmaradó áram előállításához egy  $S(x, p)$  számsűrűségfüggvényt használt<sup>6</sup>. Az áram és az EIT

$$\begin{aligned} J^\mu &= \int p^\mu S(x, p) dw \\ T^{\mu\nu} &= \int p^\mu p^\nu S(x, p) dw \end{aligned} \quad (22)$$

alakban áll elő, ahol az integrálási mérték  $dw = \frac{d^3p}{p_0}$ . Az alapegyenleteket a szokásos módon állíthatjuk elő:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{és} \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Mivel rendszertől függetlenül  $T^{\mu\nu}$ -nek jól definiált jelentése van és tudjuk, hogy  $p_\mu$  hogyan transzformálódik, ezért a (22) egyenletet  $S(x, p)$  definíciójának is tekinthetjük a következőképpen: legyen  $\mathcal{K}'$  az a rendszer, ahol  $S$  jelentése egyértelműen számsűrűség, s így

$$T^{\mu\nu} = \int p'^\mu p'^\nu S(x', p') dw'. \quad (24)$$

Ebben a rendszerben  $T^{00} = \epsilon$  és  $T^{ij} = P\delta^{ij}$ . Az EIT alakja általában

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} \quad (25)$$

ahogy azt korábban is láttuk. Mivel a Hwa-megoldás longitudinális, ezért  $v^\mu = (\gamma, 0, 0, \gamma v)$ , vagyis két egyenletre egyszerűsödik a vizsgálódás

$$T^{00} - vT^{03} = \rho \quad \text{és} \quad \frac{T^{00} + T^{33}}{T^{03}} = \frac{1 + v^2}{v}. \quad (26)$$

Az energia-impulzus tenzor ismeretében a teljes energia-impulzus megadható

$$P^\mu = \int T^{\mu\nu} d\sigma_\nu \quad (27)$$

alakban. Hwa a rapiditáseloszlásra a

$$\frac{dN}{dy} = \left[ \gamma \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_t \right]^{-1} \quad (28)$$

<sup>6</sup>A dolgozat más részeiben ezt forrásfüggvénynek fogom nevezni, s központi szerepet játszik majd.



alakú összefüggést vezetett le a fentiekből. Ha azt a speciális esetet tekintjük, amikor a folyadékkelem útja egyenes a Minkowski-téridőben, akkor

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{z}{t}. \quad (29)$$

Ez esetben a rapiditáseloszlás egy konstanssal lesz leírható:

$$v = \frac{z}{t} \Rightarrow \partial_z v = \frac{1}{t} = \frac{1}{\gamma\tau} \frac{dN}{dy} = \tau_0, \quad (30)$$

ahol  $\tau_0$  a kifagyáskori sajátidő.

Bjorken új alakra hozta a megoldást. Feltette, hogy a termodinamikai mennyiségek csak a sajátidőtől függenek:

$$\epsilon = \epsilon(\tau) \quad , \quad p = p(\tau) \quad , \quad T = T(\tau). \quad (31)$$

A sebesség ugyanúgy néz ki, mint Hwa megoldása esetén:  $u^\mu = \frac{1}{\tau}(t, 0, 0, z)$ . Ezzel felírható, hogy

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu} = u_\mu \quad \text{vagyis} \quad \partial\tau = u_\mu \partial x^\mu. \quad (32)$$

Ezt felhasználva a  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$  egyenlet egy egyszerűbb alakra hozható:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} = -\frac{\epsilon + P}{\tau}. \quad (33)$$

Ez a Bjorken megoldás dinamikát leíró alapegyenlete. Meghatározandó a  $\epsilon(\tau_0) = \epsilon_0$  kezdeti érték. Erre vezetett le Bjorken a kezdeti energiabecslést megadó összefüggését. Úgy képzelhetjük, hogy a Lorentz-kontrakciót szenvedett magok, azaz a palacsinták  $t$  ideje ütköztek. Ezért egy  $2T$  vastag és  $d_0$  magátmérőjű térfogatban szeretnénk meghatározni az energiasűrűséget. Az energiát felírhatjuk

$$E = N \frac{d\langle E \rangle}{dy} \Delta y \quad (34)$$

ahol  $\Delta y$  jelzi, hogy egy adott rapiditás intervallumban vagyunk. Vagyis a „központi” energiasűrűség megadható

$$\epsilon \approx N \frac{d\langle E \rangle}{dy} \frac{1}{2t} \frac{1}{A} = \frac{\langle m_t \rangle}{2d_0^2 t} \frac{dn}{dy}, \quad (35)$$

ahol felhasználtuk, hogy  $\frac{N}{A} = \frac{1}{d_0}$ . A termalizáció időpontja  $t_0 = 1$  fm,  $d_0 \approx 0.3-1$  fm,  $\langle m_t \rangle \approx 0.4$  GeV és  $\frac{dn}{dy} \approx 3 \times 2$ , mivel SPS energián  $\frac{dN_{ch}}{dy} \approx 3$ . Mindebből adódik, hogy

$$\epsilon \approx (1-10) \frac{\text{GeV}}{\text{fm}^3}. \quad (36)$$

Ha adott egy állapotegyenlet, pl.  $\epsilon = 3P$ , akkor a dinamikai egyenlet megoldható:

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{4}{3} \frac{\epsilon}{\tau} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-4/3}. \quad (37)$$

### 3.2.3. Bialas–Janik–Peschanski-megoldás

Ez a megoldás [34] azért rendkívül érdekes, mert összeköti az előzőekben említett Landau–Khalatnikov- és a Hwa–Bjorken-megoldást. Lényegében interpolál a boost-invariáns Bjorken kép és a nem-boost-invariáns Landau kép között. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy ez a megoldás is 1+1 dimenziós.

A hidrodinamika egyenleteit fénykúp változóiban írja fel:

$$u^\pm = e^{\pm y} \quad z_\pm = t \pm z \quad (38)$$

ahol,  $u^\pm$  a négyes sebesség fénykúp-komponensei,  $z_\pm$  pedig a fénykúp kinematikai változói. Ezen koordinátákban az energia-impulzus tenzor eltűnése a következőképpen néz ki (nem szabad elfelejteni, hogy 1+1 dimenziós a megoldás, vagyis az energia-impulzus tenzor  $2 \times 2$ -es):

$$\partial_\pm T^{01} \frac{1}{2} \partial_\pm (T^{11} \pm T^{00}) - \frac{1}{2} \partial_\mp (T^{11} \mp T^{00}) = 0 \quad (39)$$

melyből, használva az energia-impulzus tenzor (7)-beli definícióját és az  $\epsilon = \kappa p$  állapotegyenletet, két összefüggést kaptak:

$$g \partial_+ [\ln p] = -\frac{(1+g)^2}{2} \partial_+ y - \frac{g^2-1}{2} e^{-2y} \partial_- y, \quad (40)$$

$$g \partial_- [\ln p] = \frac{(1+g)^2}{2} \partial_- y - \frac{g^2-1}{2} e^{2y} \partial_+ y. \quad (41)$$

Ezeket egy egyenletbe összefoglalva

$$\partial_+ \partial_- y = \frac{g^2-1}{4(1+g)^2} (\partial_- \partial_- (e^{-2y}) - \partial_+ \partial_+ (e^{2y})). \quad (42)$$

Ezen egyenletbe behelyettesítve az ún. *Bjorken-ansatz*-ot, mely

$$y = \eta \quad (43)$$

ahol  $y$  a rapiditás,  $\eta$  pedig a „tér-idő” rapiditás:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E+p}{E-p} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+z}{t-z} \right) \quad (44)$$

egy boost-invariáns alak adódik a nyomásra mely csak a sajátidőtől függ:

$$p = p_0 \tau^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}. \quad (45)$$

Az (43) egyenletet fénykúp koordinátákban felírva

$$2y = \ln u^+ - \ln u^- = \ln f_+(z_+) - \ln f_-(z_-) \quad (46)$$

és beírva a (42) egyenletbe a

$$f_- \partial_- \partial_- (f_-) = f_+ \partial_+ \partial_+ (f_+) = \frac{A^2}{2} \quad (47)$$

összefüggés adódik, ahol  $A$  egy konstans. Így ezeket egy egyenletbe összefoglalva

$$f f'' = \frac{A^2}{2} \quad (48)$$

alakra jutunk. Ez az egyenlet megoldható, ha  $f'$ -vel szorzunk és  $f$ -fel osztunk:

$$[(f')^2]' = A^2 [\ln f]' \rightarrow f' = A \sqrt{\ln(f/H)} \quad (49)$$

ahol  $H$  egy tetszőleges konstans. Ez az egyenlet megoldható:

$$z_- - z_0 = h \int_{F_0}^F \frac{dF'}{\sqrt{\ln(F')}} \quad (50)$$

ahol a  $F = f/H$  és  $h = H/A$  jelölések kerültek bevezetésre. Ebben az egyenletben a  $z$ -nek és  $h$ -nak jut rendkívül fontos szerep, ugyanis, ha  $h \rightarrow 0$  és  $z_{\pm}$  fix, a megoldás boost-invariáns lesz, míg ha  $z_{\pm} \rightarrow \infty$  és  $h$  fix, akkor visszakapjuk a nem-boost-invariáns Landau megoldást.

### 3.2.4. Nagy–Csörgő–Csanád-megoldás

Ez a megoldás [35] gyorsuló, egzakt és explicit előáll. Nagy előnye a Landau–Khalatnikov-megoldással szemben az, hogy explicit felírható és 3+1 dimenziós. A Hwa–Bjorken-megoldással szembeni előnye az, hogy gyorsuló. Ráadásul speciális esetként tartalmazza a Hwa–Bjorken-megoldást és kiszámítható belőle a kezdeti energiasűrűség. Továbbá használható az ultrarelativisztikus nehézion ütközésekben lejátszódó folyamatok élettartamának becslésére és meghatározható belőle a rapiditáseloszlás ( $dn/dy$ ) értéke is. A megoldás a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit átírja Rindler-koordinátás alakba:

$$\eta = \operatorname{artanh} \frac{r}{t}, \quad \tau = \sqrt{t^2 - r^2}, \quad \text{azaz} \quad (51)$$

$$r = \tau \sinh \eta, \quad t = \tau \cosh \eta. \quad (52)$$

Amikor  $v = \tanh \Omega(\eta)$ , ahol  $\Omega$  a folyadékkelem rapiditása a tágulás során, a (9) és a (10) egyenletek a következő alakot öltik:

$$(\kappa + 1) \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\tau}{p} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \coth(\Omega - \eta) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad (53)$$

$$\frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\tau}{p} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \tanh(\Omega - \eta) \frac{1}{p} - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{d-1}{\sinh \eta} \frac{\sinh \Omega}{\cosh(\Omega - \eta)}. \quad (54)$$

Ezen egyenleteket a következő alakú sebesség- és nyomásmező megoldja:

$$v = \tanh(\lambda\eta) \quad (55)$$

azaz, ebben az esetben  $\Omega(\eta) = \lambda\eta$  és

$$p = p_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\lambda d \frac{\kappa+1}{\kappa}}. \quad (56)$$

Ha speciálisan  $\lambda = 1, d, \kappa \in \mathbb{R}$ , a HB megoldás adódik. Ha  $\lambda = 2, d \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa = d$ , egy gyorsuló  $d$  dimenziós megoldást kapunk. Ha  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa, d = 1$ , akkor egy speciális állapotegyenletet kapunk, de általános sebességmezőt.

### 3.2.5. Csörgő–Csernai–Hama–Kodama-megoldás

Az alkalmazás szempontjából azok a megoldások érdekesek, amelyek realiztikus rendszereket írnak le, azaz 3+1 dimenziósak, tetszőleges térbeli és sebességtérbeli geometria leírására alkalmasak és tetszőleges, realiztikus állapotegyenletet tudnak figyelembe venni. Az alapegyenletek nem-linearitása miatt nehéz az összes szempontot kielégítő megoldást találni rájuk. Landau megoldása 1+1 dimenziós, implicit, longitudinális megoldás. A Hwa–Bjorken megoldás is 1+1 dimenziós, ami egy longitudinális.

Léteznek 1+3 dimenziós megoldások klasszikus [36] és relativisztikus [37] esetre, melyek közül léteznek önhasonló megoldások. Ez azt jelenti, hogy a leírt rendszer időfejlődése során csak méretét változtatja, vagyis az időfejlődés során ugyanolyan geometriájú a forrás. A geometriát leíró felület tulajdonképpen egy termodinamikai izoterma, azaz a felület mentén a termodinamikai mennyiségek állandók. Ha kezdetben gömbszimmetrikus volt, akkor az időfejlődése gömbhéjak, ha ellipszoidális szimmetriával rendelkezett, akkor ellipszoidok sorozata. Az önhasonlóság tetszőleges geometria mellett értelmezhető.

A legegyszerűbb szimmetria, amit feltételezhetünk a gömbszimmetria, de nehézion-ütközésekben ennél pontosabb közelítés is tehető. Ha a magok nem centrálisan ütköznek, úgy az átfedő régióra az ellipszoidális szimmetria jellemző, amint ez a 2. ábrán is látható. Több olyan nem-relativisztikus és relativisztikus megoldás és modell is létezik, mely ellipszoidális szimmetria esetén explicit analitikus alakban felírható, például [37–42] cikkekben leírtak.

Tekintsük a [37] önhasonló, háromtengelyű ellipszoidális szimmetriát feltételező megoldást. Először is az állapotegyenletet írjuk fel:

$$\epsilon = \kappa p \quad \text{és} \quad p = nT. \quad (57)$$

Ezeket az egyenleteket felhasználva, behelyettesítve a (10) energiaegyenletbe és kihasználva a (6) kontinuitási egyenletet, a hőmérsékletre vonatkozó

$$u^\mu \partial_\mu T + \frac{T}{\kappa} \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (58)$$

egyenletet kapjuk. Ez és a (9) Euler-egyenlet írják le a rendszer időfejlődését az (57) egyenletben felírt állapotegyenletekkel. A térbeli ellipszoidális szimmetriát az  $s$  ún. skálaváltozóval

vezethetjük be, mely meghatározza, hogy milyen alakú felületen azonosak a termodinamikai mennyiségek egy adott pillanatban. Ez a megoldás ellipszoidális szimmetriát feltételezett, s így a skálaváltozó

$$s = \frac{r_x^2}{X^2(t)} + \frac{r_y^2}{Y^2(t)} + \frac{r_z^2}{Z^2(t)} \quad (59)$$

alakú, ahol  $X, Y, Z$  az ellipszoid nagytengelyeit leíró időfüggő függvények. A négyessebesség a következő alakú

$$u^\mu = \gamma \left( 1, \frac{\dot{X}}{X} r_x, \frac{\dot{Y}}{Y} r_y, \frac{\dot{Z}}{Z} r_z \right) \quad (60)$$

ahol  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  az  $X, Y, Z$  időderiváltjai. Ahhoz, hogy egy skálaparaméter és egy sebességprofil megoldást alkossanak az ún. együttmozgó deriváltjuknak nullának kell lennie. Ez akkor teljesül, ha az  $\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0$  konstansok és  $X = \dot{X}t, Y = \dot{Y}t, Z = \dot{Z}t$ , s így

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau} \quad (61)$$

ahol  $\tau = \sqrt{x^\mu x_\mu}$  a sajátidő,  $x^\mu$  pedig a négyeskoordináta. Így a termodinamikai mennyiségek tetszőleges  $\nu(s)$  skálafüggvénnyel

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}, \quad (62)$$

$$n(t, \mathbf{r}) = n_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^3 \nu(s), \quad (63)$$

$$T(t, \mathbf{r}) = T_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3/\kappa} \frac{1}{\nu(s)}, \quad (64)$$

alakban adhatóak meg. Látható, hogy megoldásban az  $s$  skálaváltozó nem szerepel explicit módon, csupán egy tetszőleges függvény argumentumában. A skálaváltozó azonban nem lehet tetszőleges alakú, hanem ki kell elégítenie egy összefüggést, az együttmozgó deriváltja el kell, hogy tűnjön. Ezt a feltételt a kontinuitási egyenletből könnyen levezethetjük feltéve, hogy az  $n = f(\tau)g(s)$  alakban felbontható:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (n u^\mu) &= n \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu n = f(\tau)g(s) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu f(\tau)g(s) \\ &= g(s) [f(\tau) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu f(\tau)] + f(\tau) u^\mu \partial_\mu g(s) = 0. \end{aligned}$$

Belátható, hogy ha  $f(\tau) = \frac{\tau_0^3}{\tau^3}$  és a fenti Hubble-típusú sebességmezőt vesszük, akkor szögletes zárójelben lévő kifejezés kiesik. Vagyis maradt a

$$u^\mu \partial_\mu g(s) = 0 \quad \text{ami teljesül, ha} \quad u^\mu \partial_\mu s = 0. \quad (65)$$

Ez a feltétel a skálaváltozó és a sebességprofil kapcsolatát fejezi ki, azt, hogy adott áramlási kép mellett milyen alakok elképzelhetőek. Egy skálaváltozó és egy sebességprofil csak akkor

lehet ugyanazon megoldás része, ha kielégítik ezt az egyenletet. A nehézion-fizikai alkalmazások esetén a sebességprofil általában Hubble-típusúnak választják, amely a valós körülményeket jól közelíti.

A fentiek alapján látható, hogy  $s$  bármely függvénye szerepelhet a megoldásban. Egy három térdimenziót tartalmazó megoldás esetén

$$u_\mu \partial^\mu f(s_x, s_y, s_z) = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial f}{\partial s_i} u_\mu \partial^\mu s_i = 0, \quad \text{ahol} \quad s_i = \frac{r_i^2}{t^2} \quad (i = x, y, z). \quad (66)$$

Ebből látszik, hogy a skálaváltozó és sebességprofil, amely kielégíti a (65) egyenletet, tartozhat egy hidrodinamikai megoldáshoz akkor is, ha a skálaváltozó nem explicit hanem implicit módon szerepel, azaz a megoldás  $s$  akármilyen függvényére is megoldás marad. Ahogy azt a következő fejezetben bemutatom, éppen a (66) egyenlet vezet el a megoldás tetszőleges szimmetriájú kiterjesztéséhez.

A megoldást vizsgálva felmerül a kérdés, hogy a sebességtér szimmetriáját hogyan lehet általánosítani. Jelenleg tetszőleges sebességtérbeli szimmetriát leíró hidrodinamikai megoldást nem találtak. A következő szakaszban tárgyalt megoldás, bár tetszőleges térbeli szimmetriát leír, a (60) egyenletben definiált ellipszoidális Hubble-féle sebességmezőt használja.

Az 5. fejezetben bemutatom, hogy hogyan lehet egy hidrodinamikai parametrizációba nem csak a tetszőleges térbeli szimmetria leírását, hanem általános sebességmezőt is beépíteni. A térbeli szimmetriát a parametrizáció esetén is a skálaváltozó írja le, a sebességtérbeli szimmetriát pedig a sebességpotenciálon keresztül lehet majd bevezetni. Megvizsgálom majd a (65) alapján, hogy a parametrizáció alapján milyen szükséges feltétel róható ki egy tetszőleges térbeli és sebességtérbeli szimmetria leírására alkalmas hidrodinamikai megoldásra.

### 3.2.6. Csanád–Nagy–Lökös-megoldás

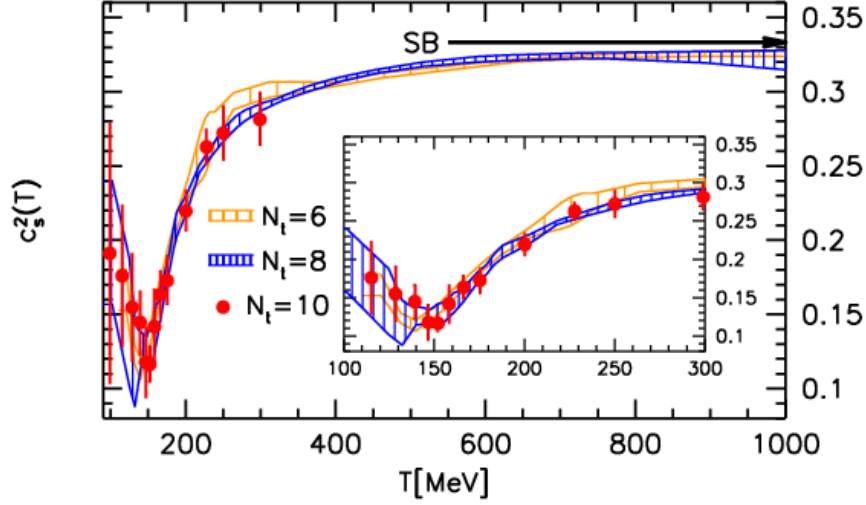
A 3.2.5. szakaszban felírt megoldás egyik lehetséges általánosítása szerepelt a 3.2.7. szakaszban, azonban az állapotegyenlet realiztikusabb alakjának figyelembe vételére is alkalmas a megoldás [43]. Rács QCD számolásokból tudjuk [44], hogy a konstans hangsebességgel felírt állapotegyenlet nem pontos megközelítés, a  $\kappa = \kappa(T) \neq \text{konstans}$ , amint az az 5. ábrán is látható. Az állapotegyenlet pontos alakja fontos egy megoldás során, mert a megmaradási tételeket kifejező alapegyenletek és a mozgásegyenlet által alkotott egyenletrendszer csak az állapotegyenlettel együtt zárt. Ahogy bonyolultabb klasszikus esetekben, a kvantum-színdinamika esetén sem adható meg zárt alakban az állapotegyenlet, azonban egy hidrodinamikai megoldás vizsgálatához egy parametrikus alakban megadott forma is elegendő lehet. Ilyen parametrikus alak található az irodalomban [44]. A 3.2.5. szakaszban felírt megoldás általánosítható olyan módon, hogy tartalmazzon egy implicit  $\kappa(T)$  vagy  $\kappa(p)$  függvényt [43].

Az állapotegyenlet általános alakja

$$\epsilon = \kappa(T)p \quad (67)$$

ahol  $\kappa$  kifejezhető a közegbeli hangsebességgel a

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \epsilon}} \Rightarrow \frac{1}{c_s^2} = \frac{\epsilon}{p} = \kappa \quad (68)$$



5. ábra. A kompresszibilitás függ a hőmérséklettől. Az ábrán a közegbeli hangsebesség látható a hőmérséklet függvényeként.

módon. Amint az az 5. ábrán is látható,  $c_s = c_s(T)$  vagyis  $\kappa = \kappa(T)$ . A hidrodinamika alap-egyenleteire adható olyan implicit megoldás, mely figyelembe veszi, hogy a kompresszibilitás, s így az állapotegyenlet függhet a hőmérséklettől. Olyan alakú állapotegyenlet is elképzelhető, melyben a kompresszibilitás nem a hőmérséklettől, hanem a nyomástól függ.

A 3.2.5. szakaszban bemutatott megoldásban a  $\kappa$  konstans. Vizsgáljuk meg a  $\kappa = \kappa(T)$  általánosabb alakú állapotegyenlet mellett a megoldást. Tegyük fel, hogy  $nT = p$ , ahogy a 3.2.5 megoldás esetén is. A számsűrűség

$$n = n_0 \left( \frac{V_0}{V} \right) \nu(s) \quad (69)$$

alakú,  $\nu(s)$  az  $s$  skálaparaméter tetszőleges függvénye. A sebességtér itt is Hubble-jellegű:

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}. \quad (70)$$

Felhasználva, hogy  $u^\mu \partial_\mu s = 0$  és kontinuitási egyenletet, a hőmérsékletegyenletből  $\kappa(T)$ -re kaphatunk

$$\frac{d\kappa(T)T}{dT} \frac{\partial_\mu T}{T} = \partial_\mu \ln \left( \frac{V_0}{V} \right). \quad (71)$$

alakú differenciálegyenlet-rendszert, amelyet az

$$\frac{V_0}{V} = \exp \int_{T_0}^T \frac{d\kappa(\beta)\beta}{d\beta} \frac{\partial_\nu \beta}{\beta} d\beta \quad (72)$$

alakú egyenlettel megadott  $V_0/V$  megold.  $V = \tau^3$  választással az integrál elvégezhető, és a  $T(\tau)$  függvény megkapható. A megoldás tehát előáll

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{x^\mu}{\tau} \\ n &= n_0 \left( \frac{\tau_0^3}{\tau^3} \right) \\ \frac{\tau_0^3}{\tau^3} &= \exp \left[ \int_{T_0}^T \left( \frac{1}{\beta} \frac{d\kappa(\beta)\beta}{d\beta} \right) d\beta \right] \end{aligned} \quad (73)$$

alakban. Általánosabb tárgyalásmódot is választhatunk, ha nem tesszük fel, hogy van megmaradó töltés. Ha így járunk el, a termodinamikai mennyiségek közötti összefüggéseket a Gibbs–Duhem-relációból származtathatjuk és az entrópiára adott kontinuitási egyenletet használhatjuk:

$$\partial_\nu(\sigma u^\nu) = 0. \quad (74)$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{x^\mu}{\tau} \\ \sigma &= \sigma_0 \left( \frac{\tau_0^3}{\tau^3} \right) \\ \frac{\tau_0^3}{\tau^3} &= \exp \left[ \int_{T_0}^T \left( \frac{\kappa}{T} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa(\beta)}{d\beta} \right) d\beta \right] \end{aligned} \quad (75)$$

alakú megoldásra jutunk. Javasoltam, hogy az állapotegyenletet válasszuk a  $\kappa = \kappa(p)$  alakban, azaz ne tegyük fel, hogy  $p = p(T)$ . Ekkor az állapotegyenlet

$$\epsilon = \kappa(p) \cdot p \quad (76)$$

alakú, tehát az energiaegyenletből kell kiindulnunk és nem a hőmérsékletegyenletből. Ekkor az  $\epsilon = \kappa(p)p$  alakú állapotegyenlethez tartozó megoldást kapunk az

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{x^\mu}{\tau} \\ \sigma &= \sigma_0 \left( \frac{\tau_0^3}{\tau^3} \right) \\ \frac{\tau_0^3}{\tau^3} &= \int_{p_0}^p \left( \frac{\kappa}{(\kappa + 1)p} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa}{dp} \right) dp \end{aligned} \quad (77)$$

alakban. Ebből a megoldásból a  $p = p(T)$  feltevéssel  $dp = \frac{dp}{dT} dT$  integráltranszformációval korábbi megoldásra jutunk. E három megoldás az állapotegyenlet olyan alakját tette fel, melyek kompatibilisek a rács-QCD-ből számolt állapotegyenletekkel [43].



### 3.2.7. Csanád–Szabó-megoldás

A 3.2.5. szakaszban bemutatott hidrodinamikai megoldás általánosítható tetszőleges szimmetriára, ha az olyan skálaváltozóval és sebességprofilal jellemezhető, amelyek kielégítik a (66) egyenletet. Ilyen megoldás felírható, s a megoldásból az általánosabb aszimmetriákhoz tartozó mérhető mennyiségek is kiszámolhatóak [45]. Ehhez az elliptikus szimmetriát leíró az (59) alakban megadott skálaparamétert hengerkoordinátákban felírva,

$$s = \frac{r^2}{R^2}(1 + \epsilon \cos(2\phi)) + \frac{r_z^2}{R^2} \quad (78)$$

juthatunk el, ahol

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} \quad \text{és} \quad \epsilon(t) = \frac{X^2 + Y^2}{X^2 - Y^2} \quad (79)$$

rendre az átlagos méret és az excentricitást jellemző paraméterek. A skálaparaméter általánosítható tetszőleges alakú forrás leírására

$$s = \frac{r^n}{R^n}(1 + \epsilon_n \cos(n\phi)) + \frac{r_z^n}{R^n} \quad (80)$$

alakban, ahol  $\epsilon_n$  az  $n$ -ed rendű aszimmetriát jellemző paraméter. Ha hengerkoordináták helyett gömbi koordinátákat választunk, akkor a skálaváltozó

$$s = \frac{r^n}{R^n}[1 + \epsilon_{a,n}(\cos(n\phi)(1 - \cos(n\theta)) + \epsilon_{b,n} \cos(n\theta)] \quad (81)$$

alakban adható meg. Ha több aszimmetria egyidejű jelenlétét írjuk le, akkor

$$s = \sum_n \frac{r^n}{R^n}(1 + \epsilon_n \cos(n(\phi - \psi_N))) \quad (82)$$

alakú a skálaváltozó, ahol a  $\psi_N$  a reakciósík szöge. Ezen általánosítások a fenti 3.2.5. szakaszban tárgyalt megoldással mind megoldásai a relativisztikus hidrodinamika alapegyenleteinek. Ezen aszimmetriák kísérletileg megfigyelhetők, ehhez azonban a rendszert a megfelelő reakciósíkba kell forgatni. A kísérlet során ugyanis a forrás geometriája eseményről eseményre véletlenszerűen változik, így a sok esemény megfigyeléséből származó aszimmetriák kiátlagolódnak. Ha azonban minden eseményt beforgatunk az aszimmetriának megfelelő reakciósíkba, akkor a gömbszimmetriától való eltérés megfigyelhető. Erről részletesen szó lesz az 5. fejezetben.

Ez a megoldás tehát tetszőleges térbeli aszimmetriát képes leírni, azonban gömbszimmetrikus, Hubble-típusú sebességmezőt használ. E sebességmezőt általánosíthatjuk egy hidrodinamikai modell keretein belül. Tekintsük most át a hidrodinamikai modellek általános tulajdonságait, a következő fejezetben pedig bemutatom az általánosított Buda–Lund-modellt.

### 3.3. Hidrodinamikai modellek

Az sQGP időfejlődése során a termalizáció és a kifagyás közötti szakasz egy táguló, hidrodinamikai közegnek tekinthető. A kvarkbezárás átalakulási hőmérsékletén megtörténik a kifagyás, azaz létrejön egy hadronokból álló közeg, mely tovább tágul. Ez a folyamat a hadronizáció; a szabadon létező kvarkok és gluonok összeállnak kompozit részecskékké. A hadronközegben a tágulás során az átlagos szabad úthossz növekedtével megszűnik a közeg kollektív áramlása. Ezután a részecskék a közegbeli mozgásukhoz képest szabadon haladnak a detektorrendszer felé. A megfigyelt részecskék eloszlása jellemző a forrásra, amelyből érkeznek. A hidrodinamikai modellezés alapötlete éppen ez: a végállapotban is mérhető részecskék lokálisan egy négydimenziós hipertérfogatban jelennek meg, s ezt a térfogatot paraméterezzük. Ezzel a képpel egyszerűsíthetjük le a hadronizáció rendkívül bonyolult folyamatát. A hidrodinamikai modellekben a megfigyelhető mennyiségeket a végállapotbeli fázistérbeli eloszlásfüggvényből számolhatjuk ki. Ezt az eloszlásfüggvényt forrásfüggvénynek nevezzük és  $S(x, p)$ -vel jelöljük.

Az előző fejezetben bemutatott hidrodinamikai megoldások számos előnnyel rendelkeznek ugyan, de nehéz feladat egy realiztikus megoldást megtalálni. Ezt a nehézséget áthidalhatjuk a dinamikai leírás leegyszerűsítésével. Ennek az egyszerűsítésnek az ára a dinamika megértéséről való (részleges) lemondás. A nyereség viszont a forrás pontosabb megismerése. Mint azt később látni fogjuk, egy modelltől a forrásfüggvényt ismerve, mely a parametrizáció magja, fontos ismereteket szerezhetünk a hidrodinamikai közegről, a kvark-gluon plazmáról.

#### 3.3.1. A hidrodinamikai modellek általános felépítése

A hidrodinamikai modellek az  $S(x, p)$  konkrét alakjában különböznek egymástól, de a forrásfüggvény szerkezete minden modell esetén ugyanolyan építőelemekből áll. A szerkezetet a következőképpen érzékeltethetjük [46] nyomán:

$$S(x, p) \sim \text{3D Hiperfelület parametrizációja} \times \text{Sajátidő-eloszlás} \times \text{Térbeli eloszlás}. \quad (83)$$

A hiperfelület parametrizáció és a sajátidő-eloszlás szorzata a  $p^\mu d^4\Sigma_\mu$  Cooper-Frye prefaktorral adható meg [47], ahol  $p^\mu$  a négyesimpulzus, a  $d\Sigma_\mu$  pedig a hiperfelület parametrizációja. A sajátidő-eloszlásra a leggyakoribb alak egy, a kifagyás sajátidejére centrált Gauss-eloszlás:

$$\text{Sajátidő-eloszlás} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau^2}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}}, \quad (84)$$

ahol a  $\Delta\tau$  a Gauss-eloszlás szélessége és a kifagyáshoz szükséges sajátidőt jelenti. Ha feltesszük, hogy a kifagyás nagyon gyorsan, pillanatszerűen történik, azaz  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , akkor a sajátidő-eloszlás a  $\delta(\tau - \tau_0)$  Dirac-féle  $\delta$ -függvényhez tart.

A térbeli egyszerűen a Maxwell-Jüttner eloszlással adható meg

$$\text{Térbeli eloszlás} = \frac{g}{(2\pi)^3} e^{-\frac{p^\nu u_\nu - \mu}{T}}. \quad (85)$$

A  $g$  a degenerációs faktor, amely pszeudoskalár mezonok esetén  $g = 1$ , barionok esetén  $g = 2$ .

### 3.3.2. A hidrodinamikai modellekből származtatható mérhető mennyiségek

Az előző fejezetben leírt módon felépített forrásfüggvényből megfigyelhető, azaz kísérletileg mérhető mennyiségek számolhatóak ki. Az egyik ilyen alapvető mennyiség, az invariáns impulzuseloszlás, a téridőre vett integrálással kapható meg:

$$N_1(p) = E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^3 N}{p_T dp_T dY d\phi} = \int S(x^\mu, p^\mu) d^4 x, \quad (86)$$

ahol  $p$  a részecske impulzusa,  $p_T$  a transzverz, azaz a nyalábirányra merőleges síkbeli impulzusa,  $\phi$  a transzverz síkbeli azimutszög,  $Y = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{E+p_T}{E-p_T} \right]$  pedig a rapiditás, ahol  $E$  a részecske energiája. Az invariáns impulzuseloszlásból a szögfüggő rész leválasztható. E felírás előnye, hogy a forrás aszimmetriáját jellemző paraméterhez jutunk: a szögfüggő részt egy Fourier-sorral felírva, a Fourier-komponensek együtthatója jellemzi azt, hogy az adott komponenshez tartozó aszimmetria mennyire jellemző a forrás impulzustérbeli geometriájára. Ahogy azt korábban a 2. fejezetben részleteztem, az sQGP megjelenésében és kollektív viselkedésének kimutatásában kulcsszerepet játszott ennek az aszimmetriának kimutatása. A felbontás  $n$ -ed rendű aszimmetria esetén tehát felírható a

$$N_1(p) = N_1(p_T) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1} v_n \cos(n\phi) \right] \quad (87)$$

alakban, ahol  $N_1(p_T)$  az azimutszögre átlagolt, vagy transzverz impulzuseloszlás  $N_1(p_T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi N_1(p)$ . Ezeket felhasználva az ún. folyási együtthatók a

$$v_n = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi N_1(p_T, \phi, Y) \cos(n\phi)}{\int_0^{2\pi} d\phi N_1(p_T, \phi, Y)} = \langle N_1(p_T, \phi, Y) \cos(n\phi) \rangle_\phi \quad (88)$$

alakban adhatók meg. Látható, hogy a  $v_n$  is kifejezhető a forrásfüggvényen keresztül. Általában ezen koefficiensek is függenek a transzverz impulzustól és a rapiditástól:  $v_n = v_n(p_T, Y)$ . Ezen mennyiségeknek központi szerepük van a forrás impulzustérbeli aszimmetriájának jellemzésében. A nehézion-fizikai kísérletekben általában harmad, esetleg negyed rendig mérik, de mértek már magasabb rendű folyásokat is.

Egy másik fontos, jelen dolgozatban részletesen tárgyalt mérhető mennyiség a Bose–Einstein-korrelációs függvény, mely a dolgozatomban központi szerepet játszik, így a következő 4. fejezetet ennek a mennyiségnek szenteltem.

## 4. Bose–Einstein korrelációs függvények

Elsőként Robert Hanbury Brown rádiócsillagász vizsgálta csillagok intenzitásfluktuációinak korrelációit a Jodrell Bank Observatóriumban, a Manchesteri Egyetemen, s eredményeit 1956-ban közölte [48]. A munka során rádiófrekvenciás források szögátmérőjét mérték a módszerrel, melynek érvényességét később asztali kísérletekkel is megerősített R. Q. Twiss-szel. A jelenséget felfedezőik után Hanbury Brown–Twiss-effektusnak, vagy röviden HBT-effektusnak nevezzük. Ezután a Narrabriban megépített Stellar Intensity Interferometry kísérletben dolgoztak, ahol tesztként a Vega szögátmérőjét mérték meg, demonstrálva az intenzitás interferometriai mérések érvényességét.



6. ábra. A Narrabriban megépített rádiótávcső két tükre [49].

A felfedezés egy másik tudományterületet teremtett a nagyenergiás fizikában, a Bose–Einstein-korrelációs vizsgálatokat. A  $\rho$  mezont keresve, 1959-ben G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Lee és A. Pais hasonló intenzitás korrelációt fedeztek fel azonos töltésű pionok között proton-antiproton ütközések adatait vizsgálva. A kísérlet során a pionok térbeli szeparációjának szögét vizsgálták [50], s eltérést találtak az azonos és ellentétes töltésűek eredményei között, melyet később a két bozon kvantum korrelációjával magyaráztak [51]. Mivel a pionok bozonok, megkülönböztethetetlenek egymástól, a kétrészecske hullámfüggvényüket szimmetrizálni kell. Ez a Bose–Einstein-szimmetrizáció a korreláció oka, amelyet nagyenergiás fizikában HBT-, GGLP-, vagy Bose–Einstein-korrelációnak is nevezzük. Ebben a fejezetben a Bose–Einstein korrelációs függvényeket, a nagyenergiás fizikában játszott szerepüket mutatom be.

#### 4.1. A Bose–Einstein-korreláció és származtatása

A nagyenergiás fizikában az  $N$ -részecske impulzus korrelációkat az invariáns impulzuseloszlásokon keresztül definiálják:

$$C_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{N_n(p_1, p_2, \dots, p_n)}{N_1(p_1)N_1(p_2)\dots N_1(p_n)}, \quad (89)$$

ahol  $N_n$  az  $n$ -részecske impulzuseloszlást,  $p_i$  pedig az  $i$ -edik részecske impulzusát jelöli. A (89) egyenletben az  $N$ -részecske impulzuseloszlások felírhatóak az  $N$ -részecske hullámfüggvényekkel. Tekintsük az  $N = 2$  esetet. Az egyrészecske invariáns impulzuseloszlást a

$$N_1(p) = \int d^4x S(x, p) |\Psi_p(x)|^2 \quad (90)$$

alakban írhatjuk fel, míg a kétrészecske impulzuseloszlást a Yano–Koonin-formulával [52] az

$$N_2(p_1, p_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 S(x_1, p_1) S(x_2, p_2) |\Psi_{p_1, p_2}^{(s)}(x_1, x_2)|^2 \quad (91)$$

alakban, ahol  $S(x, p)$  az ún. forrásfüggvény, amely azt mutatja meg, hogy mekkora valószínűséggel keletkezik egy részecske  $x$  helyen  $p$  impulzussal,  $\Psi_{p_1, p_2}^{(s)}(x_1, x_2)$  pedig a szimmetrizált kétrészecske hullámfüggvény. Eltekintve az olyan végállapotú kölcsönhatásoktól, mint a részecskék közötti Coulomb- vagy erős kölcsönhatás, melyeket a későbbiekben tárgyalok, a két egyrészecske hullámfüggvény síkhullámnak tekinthető, vagyis  $\Psi_p(x) = e^{ikx}$  alakban írható fel. A szimmetrizált kétrészecske hullámfüggvény tehát a következőképpen írható:

$$\Psi_{p_1, p_2}^{(s)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{p_1}(x_1) \Psi_{p_2}(x_2) + \Psi_{p_2}(x_1) \Psi_{p_1}(x_2)), \quad (92)$$

vagyis  $|\Psi_p(x)|^2 = 1$  és  $|\Psi_{p_1, p_2}^{(s)}(x_1, x_2)|^2 = 1 + \cos((x_1 - x_2)(p_1 - p_2))$ . Vezessük be az  $x = x_1 - x_2$  relatív koordinátát és a  $q = p_1 - p_2$  relatív impulzust! Behelyettesítve az eredményeket és elvégezve a (91) intergálokat, a (89) egyenletből

$$C_2^{(0)}(p_1, p_2) = 1 + \Re \left[ \frac{\tilde{S}(q, p_1) \tilde{S}^*(q, p_2)}{\tilde{S}(0, p_1) \tilde{S}^*(0, p_2)} \right]. \quad (93)$$

adódik, ahol  $\tilde{\phantom{x}}$  a Fourier-transzformációt jelenti és a  $(0)$  index jelzi, hogy nem vettünk figyelembe végállapotú effektust. A nagyenergiás fizikában tipikusan alkalmazható a  $p_1 \approx p_2$  közelítés, mert a korrelációs függvény  $p$ -függése sokkal simább, mint a  $q$ -tól való függése. (A levezetés során alkalmazott közelítések érvényességét a 4.7. szakaszban vizsgálom meg.) Bevezetjük a  $K \approx \frac{p_1 + p_2}{2}$  átlagos impulzust, mellyel a korrelációs függvény

$$C_2^{(0)}(q, K) \approx 1 + \frac{|\tilde{S}(q, K)|^2}{|\tilde{S}(0, K)|^2}. \quad (94)$$

A korrelációs függvény jelentősége tehát, hogy a forrásfüggvénnyel áll kapcsolatban. Ez azt jelenti, hogy a korrelációs függvényt mérve a forrás téridőbeli eloszlását vizsgálhatjuk. Ha bevezetjük a térbeli pároszlást, a korrelációs függvény jelentősége még nyilvánvalóbb. Írjuk tehát a páreloszlást

$$D(r, K) = \int d^4\rho S(\rho + r/2, K)S(\rho - r/2, K)d^4\rho \quad (95)$$

alakban. Ekkor a kétrészecske korrelációs függvényt

$$C_2^{(0)}(q, K) = 1 + \frac{\tilde{D}(q, K)}{\tilde{D}(0, K)}. \quad (96)$$

alakban írhatjuk. Ebből az alakból látható, hogy a korrelációs függvény a pároszlással áll közvetlen kapcsolatban, azaz a korrelációs függvény mérésével ez az eloszlás rekonstruálható.

## 4.2. Kinematikai változók 3 és 1 dimenzióban

Vizsgáljuk meg a korrelációs függvény változóit! Általában a korrelációs függvény a két részecske négyesimpulzusától ( $p_1$  és  $p_2$ ), vagy azok különbségétől és átlagától függ ( $q$  és  $K$ ). Azonban  $q$  és  $K$  Lorentz-szorzata zérus, mivel

$$qK = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(p_1 + p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) = \frac{1}{2}(m^2 - m^2) = 0, \quad (97)$$

vagyis az egyik komponens kifejezhető a szorzatból:

$$qK = q_0K_0 - \mathbf{q}\mathbf{K} = 0 \Rightarrow q_0 = \mathbf{q}\frac{\mathbf{K}}{K_0}. \quad (98)$$

Emiatt elegendő 3 dimenziós méréseket végeznünk. Ha a korrelációs függvényhez járulékot adó részecskéknek hasonló az energiájuk, úgy  $K$  közelítőleg tömeghéjon van, vagyis a korrelációs függvény tekinthető  $\mathbf{q}$  és  $\mathbf{K}$  függvényének. Mivel a  $\mathbf{K}$ -függés tipikusan simább, mint a  $\mathbf{q}$ -függés, a korrelációs függvény tekinthető a  $\mathbf{q}$  függvényének, s ebben a változóban parametrizálva a korrelációs függvényt vizsgálhatjuk a paramétereinek  $\mathbf{K}$ -függését. Mid-rapidity-nál  $\mathbf{K}$  helyett a transzverz impulzus  $p_T = \frac{1}{2}\sqrt{K_x^2 + K_y^2}$  tekinthető változónak, ami ekvivalens az  $m_T = \sqrt{m^2 + (p_T)^2}$  transzverz tömeggel, ahol  $m$  a vizsgált részecske.

A korrelációs függvények pontos alakjának meghatározásához három dimenziós analízisre van szükség, azonban a kellően részletes adatok hiánya az ilyen vizsgálatokat nem mindig teszi lehetővé<sup>7</sup>. A korrelációs függvényeket 1 dimenzióban is vizsgálhatjuk, azonban ehhez megfelelően választott 1D paraméterre van szükségünk. Egy ilyen paraméter akkor a legmegfelelőbb, ha

<sup>7</sup>A centralitásfüggő analízis esetén a helyzet még rosszabb. A későbbiekben röviden utalok a 0-30%-os centralitás szelekciójú mérésekre, ahol folyik 3D analízis és vannak publikált előzetes eredmények [53].

1D volta ellenére is jól jellemzi a 3D forrást. Ha a forrás 3D-ben közelítőleg gömbszimmetrikus, akkor egy olyan paraméter, amely ezt tükrözi, jó választás lehet. Egy választás lehet a Lorentz-invariáns négyes-impulzus különbség:

$$q_{\text{inv}} = \sqrt{-q_\mu q^\mu} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 - (E_1 - E_2)^2} = \sqrt{(1 - \beta_T)q_o^2 + q_s^2 + q_l^2}, \quad (99)$$

ahol  $\beta_T = \frac{2p_T}{E_1 + E_2}$ . Ez a változó PCMS-ben (**pair co-moving system**) egyszerűen felírható:  $q_{\text{inv}} = |\mathbf{q}_{\text{PCMS}}|$ . Látható azonban, hogy ha  $\beta_T \approx 1$ , akkor elveszítjük a forrás gömbszimmetriáját, mert lehet  $(1 - \beta_T)q_o \approx 0$  akkor is, ha  $q_o \not\approx 0$ . Továbbá, a  $q_{\text{inv}}$  kicsi lehet úgy is, hogy közben  $q_o \not\approx 0$ , vagyis a  $q_{\text{inv}}$  nem a legmegfelelőbb változó az 1D analízishez. A mérések szerint a longitudinálisan együttmozgó rendszer (az angol rövidítés után LCMS) olyan, ahol a 3D korrelációs függvény közelítőleg gömbszimmetrikus [54], tehát ebben a rendszerben egy helyesen megválasztott változóban végezhetünk 1D analízist. Ilyen választás a

$$Q = |\mathbf{q}_{\text{LCMS}}| \quad (100)$$

változó, amit a laborrendszerben kifejezhetünk a következő alakban:

$$Q = \sqrt{(p_{1x} - p_{2x})^2 + (p_{1y} - p_{2y})^2 + q_{\text{long}}^2}, \quad \text{ahol} \\ q_{\text{long}}^2 = \frac{4(p_{1z}E_2 - p_{2z}E_1)^2}{(E_1 + E_2)^2 - (p_{1z} + p_{2z})^2}. \quad (101)$$

Ez a változó csak akkor kicsi, ha minden koordináta kicsi és megőrzi a gömbszimmetriát. Ha a kiindulási forrásfüggvény Gauss alakú ebben a változóban, akkor a korrelációs függvény is az lesz. (A 7. fejezetben mutatom be a PHENIX korrelációs függvény méréseimet, melyek  $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200$  GeV-es arany-arany ütközésekből származnak. A  $Q$  lesz a mért korrelációs függvények parametrizációjának változója.)

Minden kísérletben érdemes megvizsgálni, hogy ha lehetséges az 1D analízis, akkor mi a helyes változó. Elképzelhető a forrás pontos megismerése nem lehetséges, csak 2D vagy 3D analízisben. Ez függhet a kísérleti elrendezéstől és az analízis részleteitől.

### 4.3. A korreláció erőssége

Könnyen látható, hogy a (94) egyenletben definiált korrelációs függvény a  $q = 0$ -ban a 2 értéket veszi fel. Kísérleti analízis során azonban néhány MeV/c alatti impulzuskülönbséget nem tudunk felbontani, így a korrelációs függvény értékét  $q = 0$ -ban csak extrapolációval érthetjük el. Jelöljük ezt az értéket  $\lambda$ -val:

$$\lambda(K) = \lim_{q \rightarrow 0} C_2(q, K) - 1. \quad (102)$$

A legtöbb mérésben  $\lambda < 1$  adódik. Ezt a jelenséget interpretálhatjuk a core-halo vagy maglória modell segítségével [55]. Ez a modell a forrásfüggvényt két részre bontja: egy magra,

ami a prompt, esetleg nagyon rövid élettartamú rezonanciákból keletkezett pionokat tartalmazza és egy glóriára, ami a hosszú élettartamú rezonanciák bomlástermékeit tartalmazza. A mag jellemző mérettartománya a 10 femtométeres nagyságrendbe esik, míg a glória a több száz femtométert is elérheti. Mivel a Fourier-transzformáció a nagy térbeli távolságokat kis impulzus-térbeli távolságokba transzformálja, a glória a korrelációs függvény kísérletileg felbonthatatlan részéhez ad járulékot, s a mag járulékát tudjuk mérni. Ezt a felosztást írhatjuk a

$$S(x, K) = S_c(x, K) + S_h(x, K) \quad (103)$$

alakban. Mivel az egyes komponensek integrálja a részecskeszámokat adja meg, írhatjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} N_c(K) &= \int S_c(x, K) d^4x = \tilde{S}_c(0, K) \\ N_h(K) &= \int S_h(x, K) d^4x = \tilde{S}_h(0, K) \end{aligned} \right\} \Rightarrow N(K) = N_c(K) + N_h(K) = \tilde{S}(0, K)$$

ahol kihasználtuk, hogy a 0-ban vett Fourier-transzformáció tulajdonképpen az integrálásnak felel meg. A felbontható  $q$  értékek esetére viszont közelítőleg igaz, hogy

$$\tilde{S}(q, K) \approx \tilde{S}_c(q, K). \quad (104)$$

Mindezt összerakva (94) egyenletbe adódik, hogy

$$\begin{aligned} C_2(q, K) &\approx 1 + \left| \frac{S_c(q, K) + S_h(q, K)}{S_c(0, K) + S_h(0, K)} \right|^2 = 1 + \left( \frac{1}{N_c + N_h} \right)^2 |S_c(q, K)|^2 \cdot \left| \frac{S_c(0, K)}{S_c(0, K)} \right|^2 = \\ &= 1 + \left( \frac{N_c}{N_c + N_h} \right)^2 \left| \frac{S_c(q, K)}{S_c(0, K)} \right|^2 = 1 + \lambda(K) \left| \frac{S_c(q, K)}{S_c(0, K)} \right|^2, \end{aligned} \quad (105)$$

ahol bevezettük a  $f_c = \left( \frac{N_c}{N_c + N_h} \right)$  *core fraction* paramétert, amely a magból és az egész forrásból érkező pionok arányát jellemzi, és amelyre  $\lambda = f_c^2$ .

Ha tehát van olyan részecske, amely pion(ok)ra bomlik és a glóriához ad járulékot, akkor meghatározott  $\lambda$  elnyomást hozhat létre, hisz a prompt pionokkal nem korrelál, s így csökkenti a korreláció erősségét. Ilyen részecske lehet az  $\eta'$ , melynek forró közegbeli tömegmódosulásának kimutatásához lehet egy eszköz a  $\lambda(K)$  függés pontos ismerete. Ezt a témát részletesebben következő, a 4.5. fejezetben fejtem ki.

#### 4.4. A korrelációs függvények Gauss- és Lévy-parametrizációja

A korrelációs függvény tehát általában egy 3 dimenziós függvény, melynek alakjára a Gauss-függvény a legegyszerűbb közelítés, melyet elméleti jóslatok is alátámasztanak [56–59]. A kisebb statisztikájú mérések esetén ez a parametrizáció statisztikailag kielégítő leírás volt, de az újabb kísérleti vizsgálatok kimutatták, hogy a Gauss-alak statisztikailag nem elfogadható [60], helyette az általánosabb Lévy-eloszlást feltételező forrásból származó korrelációs függvény írja le helyesen az adatokat.



A korrelációs függvények pontos alakjának ismerete rendkívül fontos akkor, ha a függvények paramétereit meg akarjuk határozni. A függvényalakra a 4.3. szakaszban bevezetett  $\lambda$  tengelymetszeti paraméter a legérzékenyebb. Ahogy azt részletesen kifejtettem, a  $\lambda$  paraméter transzverz tömegfüggése több érdekes fizikai folyamatra is utalhat, jelezni tudja azokat, így a transzverz tömegtől és a centralitástól való függését a lehető legnagyobb pontossággal szeretnénk meghatározni. Ehhez a korrelációs függvények precíz alakanalízisére van szükség melyet, ahogy azt később a 7. fejezetben bemutatok, a Lévy-eloszlással lehet elvégezni. Mivel azonban az általánosított Buda–Lund-modell alapja a Gauss-parametrizáció, s az irodalomban is elterjedt, mindkét alakot tárgyalom.

#### 4.4.1. A Gauss-parametrizáció

A kísérletileg mért korrelációs függvények közelíthetők Gauss-függvénnyel a

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{K}) = 1 + \lambda(\mathbf{K}) \exp \left[ - \sum_{i,j=1}^3 R_{ij}^2(\mathbf{K}) \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j \right] \quad (106)$$

alakban, ahol  $R_{ij}$  mennyiségek az ún. HBT sugarak, melyek a korreláció szélességét írják le és a forrás alakjával állnak kapcsolatban. A tömeghég feltétel természetesen nem csak ezt az egyféle parametrizációt teszi lehetővé, hisz ha a  $q \cdot K \Rightarrow q_0 = \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}}{K_0}$  egyenlőségből adódó  $q = (q_0, \mathbf{q})$  felbontásban a három független változót másként választjuk meg, más parametrizáció is adható. Azonban, a kapcsolat a téridő eloszlás és a HBT sugarak között könnyen szemléltethető, ha feltesszük, hogy a forrásfüggvény tér-időbeli eloszlása Gauss alakú. Írjuk fel a

$$S(x, K) \approx S(\langle x \rangle(K), K) \exp \left[ -\frac{1}{2} (x^\mu - \langle x^\mu \rangle) B_{\mu\nu} (x^\nu - \langle x^\nu \rangle)(K) \right] \quad (107)$$

forrásfüggvényt, ahol  $\langle x^\mu \rangle$  az effektív forrás helye, ahol

$$\langle f \rangle(K) = \frac{\int d^4x f(x) S(x, K)}{\int d^4x S(x, K)}$$

átlagolást jelöli. A

$$(B^{-1})_{\mu\nu} = \langle (x^\mu - \langle x^\mu \rangle)(x^\nu - \langle x^\nu \rangle) \rangle(K) \quad (108)$$

választás biztosítja, hogy a (107) egyenletben felírt gaussi alaknak ugyanaz lesz az RMS-e (root mean square) mint a teljes emissziós függvénynek. Így a gaussi korrelációs függvény a

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{K}) = 1 + \exp [-q_\mu q_\nu \langle (x^\mu - \langle x^\mu \rangle)(x^\nu - \langle x^\nu \rangle) \rangle(\mathbf{K})] \quad (109)$$

alakban írható fel. Összevetve (108) és (109) egyenleteket látható, hogy a forrásfüggvény szélessége éppen inverze a korrelációs függvényének. Ez annak a következménye, hogy a korrelációs függvényt a forrásfüggvény Fourier-transzformáltjaként kapjuk. Mivel a korrelációs függvény csak a relatív távolságtól függ, a forrás helyéről nem szerezhetünk információt.

Három dimenziós korrelációs függvények esetén szokás bevezetni az ún. pár- vagy Bertsch–Pratt-koordinátákat (BP-koordináták) vagy más néven az *out* – *side* – *long* rendszert. A három irányt a következőképpen definiálják: a *long* irány a nyalábirány, az *out* a pár átlagos transzverz impulzusának irányába mutat, a *side* pedig merőleges az előző kettőre úgy, hogy a BP-rendszer jobbsodrású koordinátarendszer legyen. A korrelációs függvényt ebben a rendszerben a

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{K}) = 1 + \lambda(\mathbf{K}) \exp \left[ -R_o^2(\mathbf{K})q_o^2 - R_s^2(\mathbf{K})q_s^2 - R_l^2(\mathbf{K})q_l^2 - R_{os}^2(\mathbf{K})q_{os}^2 - R_{sl}^2(\mathbf{K})q_{sl}^2 - R_{ol}^2(\mathbf{K})q_{ol}^2 \right] \quad (110)$$

alakban írjuk fel. A BP-sugarakat Descartes-koordinátákkal a

$$R_{ij}^2(\mathbf{K}) = \langle (x_i - \langle x_i \rangle - \beta_i t_i - \langle t_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle - \beta_j t_j - \langle t_j \rangle) \rangle \quad (111)$$

alakban adhatjuk meg, ahol  $i, j = out, side, long$ . Centrális ütközések esetén, ahol a henger-szimmetria jó közelítés, azaz a forrásfüggvényre igaz, hogy

$$S(x, y, z, t; K_T, K_l) = S(x, -y, z, t; K_T, K_l), \quad (112)$$

akkor belátható, hogy ez a szimmetria a korrelációs függvényben  $q_s = -q_s$  alakban jelenik meg. Ekkor  $R_{os} = R_{sl} = 0$ . A felírás még egyszerűbb is lehet, ha eltranszformáljuk a rendszert az LCMS-be, a pár longitudinálisan együttmozgó rendszerébe. Ez azt jelenti, hogy  $\beta_{long} = 0$ . Ekkor  $R_{long}^2 = \langle \tilde{z}^2 \rangle(K)$  és  $R_{ol}^2(K) = 0$ . A 5. fejezetben az általánosított Buda–Lund-modellt is ezen koordinátákkal írom fel.

#### 4.4.2. Diffúzió, anomális diffúzió és a Lévy-eloszlás

A nagy statisztikájú kísérleti eredmények arra engednek következtetni, hogy a Gauss-alakú forrás statisztikailag nem elfogadható feltevés a forrás alakjára, ezért a korrelációs függvények alakja sem lesz gaussi [60].

A kétrészecske korrelációs függvények nemgaussi alakjának több oka is lehet. A Lévy-eloszlások nehézion-fizikai alkalmazását először [61] cikkben javasolták, mint a Bose–Einstein korrelációs függvények modellfüggetlen leírására alkalmas eloszlásokat, melyek speciális esetként előállítják a Gauss-eloszlást és a Cauchy-eloszlást is. A Lévy-eloszlások nehézion-ütközésekben való megjelenésére lehetséges magyarázatként felmerültek a QCD jetek [62, 63] vagy az ebben a fejezetben tárgyalt anomális diffúzió [64, 65]

Egy másik lehetséges ok a nehézion-ütközés után megjelenő, pion(ok)ra bomló részecskék járuléka a korrelációs függvényhez<sup>8</sup>. Ezek a részecskék lehetnek nagy bomlási idejűek – a forrás 5-10 fm-s méretéhez képest –, és így széles eloszlásfüggvényük lehet. Mivel a korrelációs függvény kapcsolatban áll a térbeli eloszlásfüggvénnyel, ahogy azt a 4.1. szakaszban bemutattam, a rezonanciabomlásokból származó széles eloszlások megjelennek a korrelációs függvényekben is,

<sup>8</sup>Mivel a kísérleti analízisben pionokkal foglalkozom, a rezonanciabomlások közül mindig azokat emelem ki, melyek pion(ok)ra bomlanak. Ha kaon Lévy-analízist végeztem volna, úgy a kaonra bomló rezonanciákat kellene figyelembe venni.

módosítva alakjukat. Ez a hatás jelentkezhethet úgy, hogy a korrelációs függvény alakja a Gauss-tól eltérő lesz [66].

Vannak olyan munkák is, melyek a korrelációs függvények alakjának a Gauss-függvénytől való eltérését kísérleti technikai effektusként magyarázzák [67–69]. A megközelítés szerint a Gauss-alaktól való eltérés sok, a kísérletben mért különböző szélességű Gauss-függvények átlagolásából ered.

Egy lehetséges magyarázat a pionok anomális diffúziója a kifagyott részecskék között. Normál diffúziós folyamat esetén egy próbatest, mely jelen esetben a korreláló pár egyik részecskéje, egy akadályokkal egyenletesen kitöltött térrészen halad át, azok között bolyong úgy, hogy az átlagos szabad úthossz végig állandó. Egy ilyen folyamatban a korrelációs függvény Gauss-alakú<sup>9</sup>. Anomális diffúzió során az átlagos szabad úthossz nem állandó, s így a korrelációs függvény sem Gauss alakú, hanem hatványfüggvényszerű lecsengést mutat. Matematikai részletek Klaf-ter és Metzler [65] cikkében találhatóak. Nehézion-fizikai kontextusban egy szimulációs elemzés található a [64] cikkben, mely a hadron-rezonancia modellt [70] használva elemzi az anomális diffúzió szerepét a femtoszkópiai vizsgálatokban. Figyelembe véve az sQGP kifagyása után a sok száz részecskéből álló, táguló rendszert, s hogy a korreláló párok ezen keresztül utazva érkeznek el végül a detektorokhoz látható, hogy nehézion-ütközésben az anomális diffúzió feltételezése természetesebb, mint a hagyományos diffúzióé. Ebben a szakaszban bemutatom, hogyan adódik az anomális diffúzióból a Lévy-eloszlás karakterisztikus függvénye, mely a mért korrelációs függvények parametrizációját adja.

Ebben a fejezetben Lévy-eloszlásnak az anomális diffúzióban való megjelenését mutatom be. A részletes levezetések helyett, melyek megtalálhatóak a [65] cikkben, a fizikailag lényeges szempontokra koncentrálok.

A diffúzió tulajdonképpen véletlen bolyongás egy olyan rendszerben, mely reprezentálható egy adott rácsállandójú ráccsal és egy állandó időközzel, amely az egyik rácspontból a másikba való ugrás között telik el. Egy ilyen részecske tipikus trajektóriáját láthatjuk a 7. ábrán.

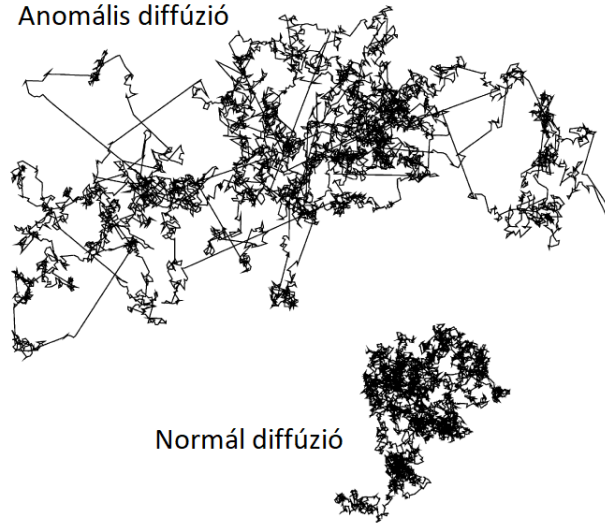
Ez a fajta diffúziós mozgás sok, a természetben is megfigyelhető és még több idealizált, komplex rendszerben megjelenik. Olyan rendszerekben azonban, melyekben az átlagos szabad úthossz változik, az általánosított centrális határeloszlástétel értelmében, a próbatest anomális diffúziót fog végezni. Az ilyen rendszerek leírására a CTRW (Continuous Time Random Walk) leírás használható, amellyel megmutatható, hogy a normál diffúzió esetén fellépő Gauss-alakú megoldás Lévy-alakú lesz.

A CTRW modell azon alapszik, hogy az adott ugrás hosszát és az eltelt időt egy  $\psi(x, t)$  eloszlásfüggvény adja meg. Ebből az ugrás hossza kifejezhető és az eltelt idő rendre a

$$\lambda(x) = \int_0^\infty dt \psi(x, t), \quad w(t) = \int_{-\infty}^\infty dx \psi(x, t) \quad (113)$$

alakban adhatók meg. Ezekkel, egy megfelelően általánosított master egyenleten keresztül, meghatározható annak a valószínűsége, hogy a részecske  $x$  helyre  $t$  időben érkezik úgy, hogy előtte

<sup>9</sup>Ilyen bolyongást bemutató eszköz az oktatásban használt Galton-tábla.



7. ábra. Az anomális és a normál diffúziót végző test tipikus trajektóriái. Megfigyelhető, hogy a normál diffúzió esetén az egyes ugrások között egyenlő távolságok vannak, míg ez az anomális diffúzióra nem igaz. Az ábra a [65] cikkből származik.

az  $x'$  helyen volt  $t'$  időben:

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dt' \eta(x', t') \psi(x - x', t - t') + \delta(x) \delta(t). \quad (114)$$

Az összeg második tagjának két  $\delta$ -függvényei a kezdeti feltételeket rögzítik. Ennek segítségével kifejezhető a  $W$  valószínűségi eloszlásfüggvény

$$W(x, t) = \int_0^t dt' \eta(x, t') \Psi(t - t') \quad (115)$$

módon, ahol

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t dt' w(t') \quad (116)$$

kumulatív eloszlással van definiálva. Ha a karakterisztikus várakozási idő és lépéshossz véges, akkor bizonyos feltételek teljesülése esetén a Brown-mozgást leíró diffúziós egyenletre jutunk vissza. A karakterisztikus várakozási idő divergál és aszimptotikus viselkedése leírható egy hatványfüggvénnyel

$$w(t) \sim A_{\alpha} (\tau/t)^{1+\alpha} \quad (117)$$

alakban, ahol  $0 < \alpha < 1$  (normál diffúzió esetén  $\alpha = 1$ ), akkor egy általánosabb egyenletre jutunk, melynek alakja

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (118)$$

Ez az egyenlet írja le az anomális diffúziót. A  $K_\alpha$  az általánosított diffúziós együttható,  ${}_0 D_t^{1-\alpha}$  a Riemann–Liouville-féle frakcionális deriváló operátor pedig a

$${}_b D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \quad (119)$$

integrálon keresztül van definiálva. Az egyenlet lényeges tulajdonsága, hogy ha a karakterisztikus várakozási idő Poisson-eloszlást követ, akkor az  $k$  impulzustérben egy egyszerű megoldásra juthatunk:

$$W(k, t) = e^{-tK^\alpha |k|^\alpha}. \quad (120)$$

Ez egy ismert eloszlás, a Lévy-eloszlás karakterisztikus függvénye [71]. Itt  $\alpha$  a Lévy stabilitási index, amely  $0 < \alpha \leq 2$  értéket vehet fel,  $K$  pedig az anomális diffúziós állandó:  $K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{2\Delta t^\alpha}$ . Látható, hogy a Gauss-alakhoz nagyon hasonlót kaptunk, de megjelent egy extra paraméter, amely lehetővé teszi az eloszlásfüggvény impulzustérbeli alakjának pontos analizisét. Az is látható, hogy az újonnan kapott eredmény az  $\alpha = 2$  speciális esetben a Gauss-eloszlásra, azaz a normál diffúzió esetére vezethető vissza.

#### 4.4.3. A Lévy-parametrizáció

Az előző szakaszban elmondottak alapján tehát a forrást Lévy-alakúnak feltételezve

$$\mathcal{L}(\alpha, R, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{Q} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{2} |R\mathbf{Q}|^\alpha} \quad (121)$$

formában írhatjuk fel a forrásfüggvényt. Ha a 4.2. szakaszban tárgyaltak szerint, a Lévy-esetben is a (101) egyenletben definiált  $Q$ -t választjuk a korrelációs függvény változójának és a  $\lambda$  paramétert is ugyanúgy vezethetjük be, mint a gaussi esetben, a Lévy-típusú korrelációs függvényt

$$C_2^{(0)}(Q; \lambda, R, \alpha) = 1 + \lambda e^{-|QR|^\alpha} \quad (122)$$

alakban írhatjuk fel, ahol az  $R$  a skálaparaméter és az  $\alpha$  a stabilitási index. A  $^{(0)}$  index jelöli, hogy a korrelációs függvény alakjában még nem vettünk figyelembe semmilyen végállapotbeli kölcsönhatást. A 6. fejezetben részletesen tárgyalom a végállapotú Coulomb-kölcsönhatás szerepét, itt csak annyit jegyzek meg, hogy figyelembevételével a korrelációs függvény a

$$C_2(\mathbf{Q}; R, \lambda, \alpha) = K(\mathbf{Q}; R, \lambda, \alpha) C_2^{(0)}(\mathbf{Q}; R, \lambda, \alpha) \quad (123)$$

alakban írható fel, ahol  $K$  a Coulomb-korrekción. A 4.4.1. szakaszban bevezetett Bertsch–Pratt-koordinátákat itt is használhatjuk, s vizsgálhatjuk a sugarakat ebben a rendszerben. A 3D Lévy-parametrizáció

$$C_2^{(0)}(\mathbf{Q}; \lambda, R, \alpha) = 1 + e^{-|\sum_{i,j} R_{ij}^2 Q_i Q_j|^{\alpha/2}} \quad (124)$$

alakban írható fel, ahol  $R_{ij}$  a skálaparamétereket tartalmazó, szimmetrikus mátrix. Ez a parametrizáció már nem feltétlenül gömbszimmetrikus. A kísérleti vizsgálatok során kimutatták, hogy az  $\alpha$  paraméter bevezetése statisztikailag jobb leírását adja az adatoknak,  $\alpha$  szignifikánsan eltér az  $\alpha=2$  értéktől a vizsgált ütközési energián és  $m_T$  tartományon 1D-ben [60] és 3D-ben [53] is.

#### 4.5. A paraméterek lehetséges fizikai interpretációja

Mind a Gauss-, mind a Lévy-típusú eloszlásból származó korrelációs függvénynek, a magglória modellt is figyelembe véve három paramétere van:  $\lambda$ , mely a korrelációs függvény nullába extrapolált értéke,  $R$  a skála paraméter és  $\alpha$  a stabilitási index, mely a Gauss-esetben  $\alpha = 2$  konstans, Lévy-esetben pedig szabad paraméter.

Ahogy azt a 4.3. szakaszban részben tárgyaltam, a  $\lambda$  paraméter a forrás összetettségére jellemző paraméter. A korrelációs függvény nem felbontható a néhány MeV/c impulzuskülönbségű tartományban, pedig bomlásból származó pion is ehhez a részhez ad járulékot. Az egyik ilyen rezonancia az  $\eta'$ , melynek létezik öt pionos bomlása:

$$\eta' \rightarrow \eta + \pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^- + (\pi^+ \pi^0 \pi^-). \quad (125)$$

Kinematikai megfontolásokból következik, hogy az ezen bomlásból származó pionok  $\lambda$  értékét az  $m_T = 150\text{--}200$  MeV/c-s tartományon befolyásolhatják [72–74]. Mivel azonban ezek a pionok nem korrelálnak a magból jövő pionokkal, a korreláció erőssége csökken, mely azt eredményezi, hogy a  $\lambda(m_T)$  függvény nem lesz konstans, hanem elnyomódik.

A  $\lambda$  paraméter a parciálisan koherens részecskekeltéssel is kapcsolatban állhat. Ahogy azt a (103) felbontásból adódó (105) felírás is mutatja, a korreláció erőssége a prompt és bomlásból keletkezett pionok számának arányával áll kapcsolatban. Ugyanakkor, ha korrelált részecskekeltés során is keletkeznek pionok, azok nem korrelálnak a többi pionnal. Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy a maghoz tartozó forrásfüggvényt további két részre bontjuk: egy tartozik a koherens és egy az inkoherens részecskekeltéshez:

$$S_c(x, k) = S_c^c(x, p) + S_c^i(x, p). \quad (126)$$

A korábbiakhoz hasonlóan a koherens és inkoherens részek arányait is bevezethetjük:

$$p_c(\mathbf{p}) = N_c^c/N_c \quad (127)$$

alakban, ahol  $N_c^c$  a koherensen keltett részecskék száma a magban, míg az  $N_c$  a magban lévő összes részecskék száma. Ezen jelölésekkel kifejezhető a glória és az inkoherensen keltett

részecskék aránya is [55] ( $p$  az impulzust,  $p_i$  pedig a fenti definíció szerinti arányt jelenti.):

$$f_h(\mathbf{p}) = 1 - f_c(\mathbf{p}) \quad \text{és} \quad p_i(\mathbf{p}) = 1 - p_c(\mathbf{p}). \quad (128)$$

Tehát figyelembe véve, hogy a forrás két részből áll: a prompt részecskék alkotta magból és a rezonanciák bomlástermékei alkotta glóriából valamint, hogy a mag tovább bontható koherens és inkohere részekre, a kétrészecske korreláció erőssége megadható

$$\lambda_2 = f_c^2[(1 - p_c)^2 + 2p_c(1 - p_c)] \quad (129)$$

alakban. Ugyanezen megfontolásokkal a háromrészecske korrelációs erősség is felírható:

$$\lambda_3 = 3f_c^2[(1 - p_c)^2 + 2p_c(1 - p_c)] + 2f_c^3[(1 - p_c)^3 + 3p_c(1 - p_c)^2]. \quad (130)$$

A modell részletes leírása az [55] cikkben található. Itt csak annyit jegyzek meg, hogy a fenti két korrelációs erősséggel mérhető lehet a koherencia mértéke. Látható, hogy a két mennyiségből előállítható egy olyan kombináció, mely nem függ az  $f_c$ -től:

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_3 - 3\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_2}}. \quad (131)$$

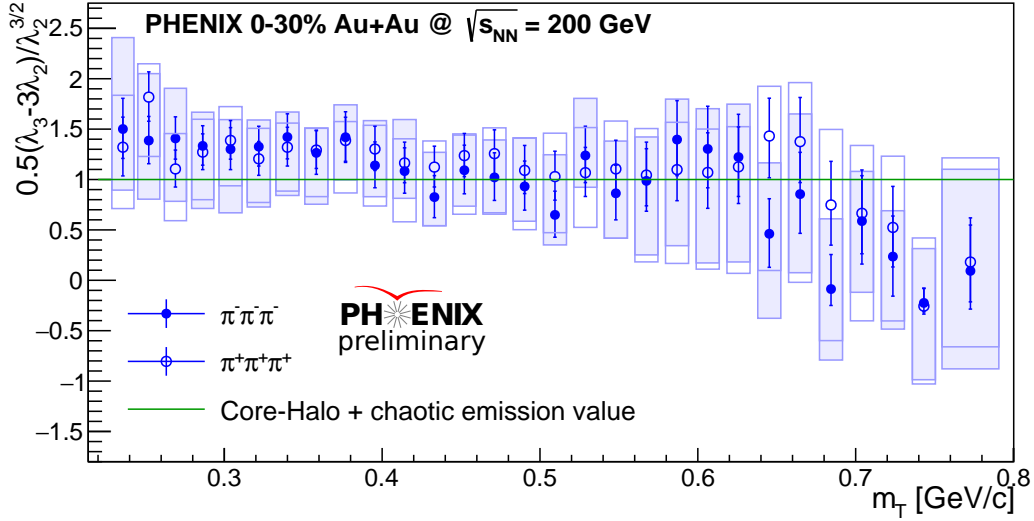
Ez a mennyiség, ha  $p_c = 0$ , akkor  $\kappa_3 = 1$ , ha  $p_c \neq 0$ , akkor  $\kappa_3 \neq 1$ .

Természetesen a  $\kappa_3$  paraméter megméréséhez két- és háromrészecske korrelációkat is kell mérni. A PHENIX kísérletnél születtek ilyen eredmények, melyek azt mutatják, hogy a parciálisan koherens részecskekeltés nem zárható ki. A  $\kappa_3$  mért értéke látható a 8. ábrán az  $m_T$  függvényeként [53].

Mind az  $\eta'$  részecske tömegének csökkenése, mind a parciálisan koherens részecskekeltés a korreláció erősségét jellemző  $\lambda$  paraméteren keresztül, közvetett módon megfigyelhető jelenségek lehetnek és több elméleti munka is foglalkozik velük [72, 74–78]. Mindezen folyamatok megismerése céljából fontos, hogy a  $\lambda$  paraméter transzverz tömeg és centralitásfüggését pontosan ismerjük.

Az  $R$  paraméter a gaussi esetben a mérettel állt kapcsolatban, a Lévy-esetben azonban nem tisztázott a fizikai jelentése. Bár az  $R_{\text{Gauss}}$  és az  $R_{\text{Lévy}}$  koncepciókban más mennyiségek, mégis hasonló viselkedést és trendet mutatnak a transzverz tömeg függvényeként mérve (ld. 8 és 9. fejezetek), amiből arra következtethetünk, hogy az  $R$  paraméter a Lévy-esetben is a rendszer méretével lehet összefüggésben [61]. Gauss-esetben ismert a hidrodinamikai jósálatokból adódó  $R \propto \frac{1}{\sqrt{m_T}}$ , azaz  $\frac{1}{R^2}(m_T)$  lineáris skálázás (lásd pl. [58, 79, 80]), amely a mérések szerint a Lévy-skála paraméterre is érvényes.

Az újonnan bevezetett  $\alpha$  paraméter több fizikai jelenséget is jelezhet. Ilyen pl. az anomális difúzió (ld. 4.4.2. fejezet) vagy a kritikus viselkedés megjelenése. A Lévy-eloszlás a Gauss-eloszlás egyfajta általánosításának tekinthető. A (121) definícióból látható, hogy  $\alpha = 2$  speciális eset a Gauss-eloszlásnak, míg az  $\alpha = 1$  a Cauchy-eloszlásnak felel meg. Az  $\alpha < 2$  esetben hatványfüggvényyszerű lecsengése lesz az eloszlásnak, melyet három dimenzióban  $\mathcal{L}(\alpha, R, \mathbf{r}) \sim (|\mathbf{r}|/R)^{-3-\alpha}$

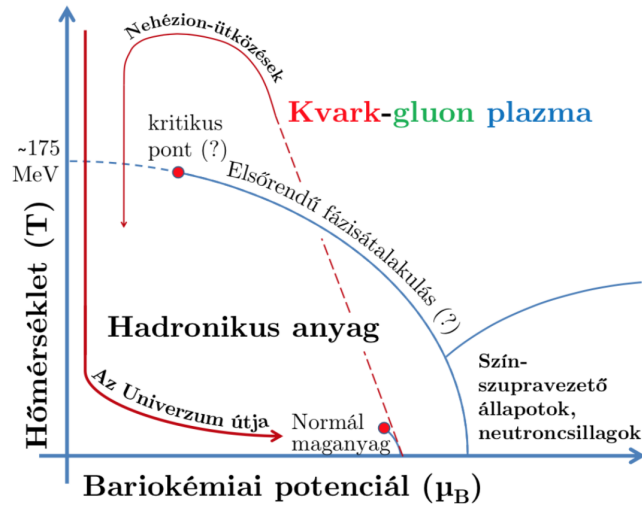


8. ábra. A  $\kappa_3$  mag-glória paraméter mért értéke a PHENIX kísérletnél, arany-arany ütközésekben,  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV/c energián az  $m_T$  függvényében. A mérés 0-30%-os centralitás szelekcióval készült a később részletezett kétrészecske mérésekkel összhangban [53].

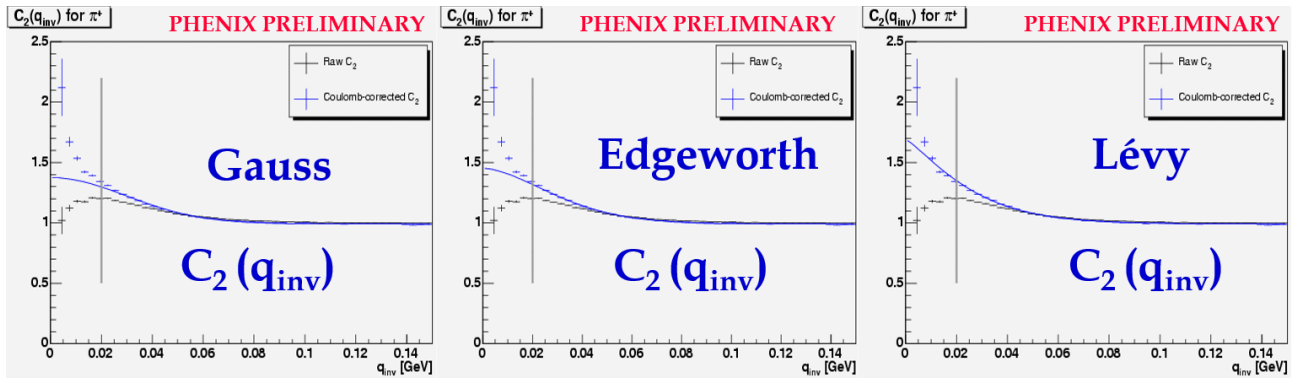
jellemezhetünk, ha  $|\mathbf{r}|/R \rightarrow 0$ . Egy dimenzióban, azaz a szögekre átlagolva pedig  $r^2 \mathcal{L}(\alpha, R, r) \sim r^{-1-\alpha}$ , vagyis az eloszlás második momentuma divergál, kísérletileg nem értelmezhető. A Lévy-eloszlások e hosszútávú viselkedése, hatványfüggvényszerű lecsengése arra utal, hogy a Lévy-eloszlás megjelenésének lehet egy másik oka is az anomális diffúzió mellett, méghozzá a QCD kritikus pontjának közelsége [62]. A kritikus pontban ugyanis kritikus fluktuációk és hosszútávú korrelációk jelenhetnek meg, s a térbeli korrelációk lecsengése hatványfüggvényszerű lesz, melyet a  $\varphi$  rendparaméter korrelációs függvényével a  $\langle \varphi(r)\varphi(0) \rangle \sim r^{-1-\eta}$  alakban írhatunk fel. Itt az  $\eta$  a térbeli korrelációs függvényhez tartozó kritikus exponens. E kifejezés alakjának azonossága az egy dimenziós Lévy esettel szembeűnő. Ugyan lehetnek más effektusok, melyek bonyolítják a leírást, önmagában ez a hasonlóság rámutat a korrelációs függvények exponensének mérésének fontosságára. Az is ismert, hogy a QCD a 3D Ising modell univerzalitási osztályába tartozik [82, 83], melynek ismertek a kritikus exponensei [84, 85]. A 3D Ising modell esetén  $\eta = 0.03631(3)$ , véletlen külső tér jelenlétében esetén pedig  $\eta = 0.5 \pm 0.05$ . A Lévy-exponens mérése a fázisdiagramon rendkívül fontos eszköz lehet a kritikus pont megtalálásában. A QCD fázisdiagramját a lehetséges kritikus ponttal a 9. ábra szemlélteti.

Függetlenül attól, hogy mi is pontosan az  $\alpha$  paraméter fizikai jelentése, bevezetése azért is fontos, mert meghatározza a korrelációs függvény alakját. Korábbi tanulmányok megmutatták, hogy a  $\lambda$  paraméter értéke függ attól, hogy a korrelációs függvényre milyen alakot feltételezünk [86]. Tehát ahhoz, hogy a  $\lambda$  paramétert pontosan meg tudjuk mérni, pontosan kell tudnunk a korrelációs függvény alakját is. Ezt jól mutatja a 10. ábra, ahol három különböző parametrizációval illesztették ugyanazokat az adatokat.





9. ábra. A QCD fázisdiagramja a kritikus ponttal. Alacsony bariokémiai potenciálon cross-over típusú, míg nagy bariokémiai potenciálon elsőrendű fázisátalakulást figyeltek meg elméleti és kísérleti munkák során. Az elsőrendű fázisátalakulás egy fázishatár meglétét jelenti, amely kritikus pontban végződik. E kritikus pont helyének meghatározása a nehézion-fizikai kutatások egyik fő iránya. (Az ábra Kincses Dániel szakdolgozatából származik [81].)



10. ábra. A  $\lambda$  tengelymetszeti paraméter értékének függése a parametrizációtól jól megfigyelhető a különböző parametrizációkkal való illesztésekben [86]. A függőleges szürke vonal az illesztés alsó határát jelöli. Látható az is, hogy ebben az analízisben is a Lévy alakú forráson alapuló parametrizáció írta le legjobban az adatokat.

#### 4.6. A Lévy-eloszlástól való eltérés vizsgálata

R.P. Feynman híres mondása szerint bármilyen szép is az elméletünk, ha a kísérletek cáfolják, akkor az elmélet egyszerűen nem igaz. Esetünkben az ún. sorfejtéses módszerrel megvizsgálhatjuk, az adatok mutatnak-e eltérést a feltételezett függvényalaktól. Létezik Gauss-, exponenciális és Lévy-alakú korrelációs függvények esetére is ilyen sorfejtés [55, 61, 87–89].

A módszer lényege, hogy a feltételezett függvény alak körül fejtünk sorba, ami lényegében egy súlyfüggvény szerepét tölti be, s ezt szorozzuk egy sorral. Elvileg ezzel a módszerrel modellfüggetlenül meghatározhatjuk a korrelációs függvény alakját. Konkrétan a Lévy-esetben, a sorfejtés a Lévy-eloszlás körül történik, a Lévy-eloszlás a súlyfüggvény. Írjuk fel a dimenziótlan  $t$  változóval:

$$w(t|\alpha) = e^{-t^\alpha} \quad (132)$$

alakban, ahol a  $t$  egy tetszőleges dimenziótlan változó, melyet a korrelációs vizsgálatokban  $t = RQ/\hbar c$ -nek választhatunk. A sor, amivel megszorozzuk ortonormált kell legyen a súlyfüggvényre; ilyen sort a Gram-Schmidt eljárással találhatunk. A Lévy-esetben a következő általános alakot írhatjuk fel:

$$C_2(t) = N \left[ 1 + \lambda e^{-t^\alpha} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n L_n(t|\alpha) \right) \right], \quad (133)$$

ahol  $L_n(t|\alpha)$  jelöli a Lévy-polinomokat, együttthatójuk pedig a  $c_n$  természetes számok. A polinomok általános  $\alpha$  esetén kifejezhetőek egy determinánsként, bevezetve a

$$\mu_n^\alpha = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) \quad (134)$$

jelölést, másodrendig így írhatjuk

$$L_0(t|\alpha) = 1 \quad L_1(t|\alpha) = \begin{vmatrix} \mu_0^\alpha & \mu_1^\alpha \\ 1 & t \end{vmatrix} \quad L_2(t|\alpha) = \begin{vmatrix} \mu_0^\alpha & \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha \\ \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha & \mu_3^\alpha \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}. \quad (135)$$

Általánosan a

$$L_n(t|\alpha) = \begin{vmatrix} \mu_0^\alpha & \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha & \cdots & \mu_n^\alpha \\ \mu_1^\alpha & \mu_2^\alpha & \mu_3^\alpha & \cdots & \mu_{n+1}^\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \end{vmatrix}$$

determinánst kell kiszámítani. Az első két rendben is hosszú kifejezések adódnak a kifejtésekből, így csak azokat adom meg:

$$\begin{aligned} L_0(t|\alpha) &= 1 \\ L_1(t|\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) t - \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) \right] \\ L_2(t|\alpha) &= \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{2}{\alpha}\right) \right] t^2 - \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{4}{\alpha}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) \right] t + \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{4}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{3}{\alpha}\right) \right] \right\}. \quad (136) \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel megmutatható, hogy az  $\alpha = 1$  eset, vagyis az exponenciális függvény körüli sorfejtés a Laguerre-polinomokra vezet.

A Lévy-alaktól való eltérést tehát ezen polinomok bevezetésével és együtthatóinak mérésével tehetjük meg. Azaz az illesztőfüggvényünket

$$C_2(t) = N \{1 + \lambda e^{-t^\alpha}\} \Rightarrow C_2(t) = N \left\{ 1 + \lambda e^{-t^\alpha} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n L_n(t|\alpha) \right] \right\} \quad (137)$$

módon megváltoztatjuk, s mérjük  $c_n$  értékét tetszőleges rendig vagy rendben. A későbbiekben bemutatott analízisek során az elsőrendű korrekciókat vizsgáltam.

#### 4.7. A közelítések érvényessége

A korrelációs függvény (94) egyenletben felírt alakjának levezetése során több közelítést is tettünk, melyek érvényességéről érdemes szót ejteni. A közelítések kísérleti és elméleti vizsgálatáról kimerítő irodalom található a [55,90,91] összefoglaló munkákban és hivatkozásaikban.

Feltettük, hogy a részecskepár mindkét tagja síkhullámként kezelhető. Ebből a feltevésből következett, hogy a korrelációs függvény egy 1+pozitív definit függvény. Ez a közelítés nehézion-ütközésekben a tapasztalat szerint helytálló, de kisebb rendszerek, mint  $e^+ + e^-$  [92] vagy  $p + p$  [93] ütközésekben nem igaz.

Hasonló feltevés, hogy a forrásfüggvény  $K$ -ban kellően sima, vagyis a részecskék hasonló impulzusúak. Ezt a közelítést a [94] cikkben vizsgálták és megállapították, hogy  $\sim 95\%$  pontossággal érvényes.

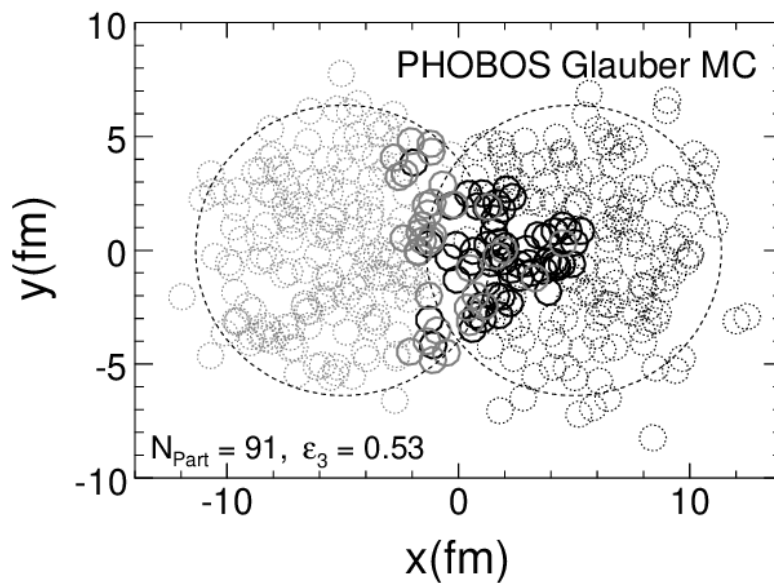
A tömeghøj feltételt a (98) egyenlettel fogalmaztuk meg. Ebből az egyenletből látszik, hogy a négy impulzuskomponens közül csak három független. Vagyis a  $C(\mathbf{q}, \mathbf{K})$   $\mathbf{q}$ -függésének vizsgálata csak három komponens rekonstrukcióját teszi lehetővé a négyből. Ez bevezet  $S(x, p)$  alakjának feltérképezésébe egy modellfüggést.

A levezetés során azt is feltettük, hogy a forrásból keletkező részecskék inkoherens módon keletkeznek és nincsenek jelen rezonanciabomlásból származó részecskék. Azonban elképzelhető, hogy a részecskék egy része koherens módon keletkezik. A koherens részecskekeltés befolyásolhatja a korreláció erősségét [55,95]. Ezen lehetőségeket vizsgáltam a 4.5. fejezetben és megmutattam, hogy a jelenségek két- és három-részecske korrelációs függvények szimultán vizsgálatával elvileg kimutathatóak.

A korrelált részecskekeltésnek több oka is lehet: kollektív folyás, jetek, részecskebomlások, megmaradási törvények. A (89) egyenlet alapján látható, hogy kis impulzusoknál a Bose-Einstein szimmetrizációból adódó korreláció a párok átlagos számával arányos, ami közelítőleg a multiplicitás négyzetével fejezhető ki. Pionok rezonanciabomlásból is keletkezhetnek korreláltak, mely azonban a multiplicitással arányos. Így nehézion-ütközésekben kis relatív impulzusnál a Bose-Einstein korreláció dominál, vagyis jogosan tekintettünk el más korrelációktól.

## 5. A Buda–Lund-modell és általánosítása

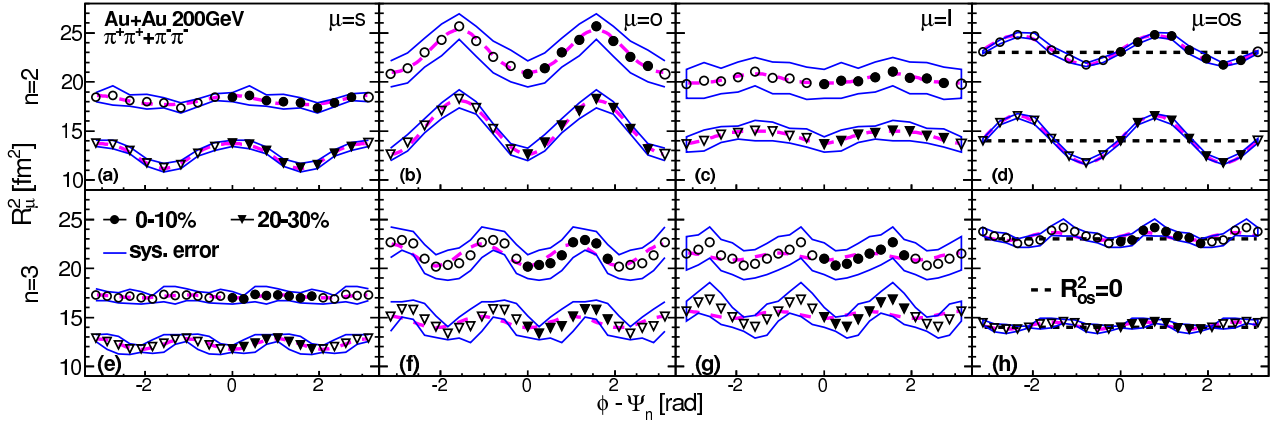
Jelen dolgozat egyik célja az 5.1. és az 5.2. szakaszokban ismertetett hidrodinamikai parametrizáció, a Buda–Lund-modell [46,96,97] általánosítása bonyolultabb szimmetriájú források leírására. Ahogy a gömbszimmetrikus forrás feltételezése, úgy az elliptikus szimmetria is egy közelítés, mely nem mindig érvényes. Mérhetőek olyan mennyiségek, amelyek megmutatják, hogy az egyszerű ellipszoidális forrásnál bonyolultabb geometriájúak is keletkeznek az ütközések során nemcsak nehézion-ütközésekben [98], de akár kis rendszerekben is [99]. Szimulációs eredmények is utalnak ilyen forrásokra, ahogy azt a 11. ábrán láthatjuk. A szimuláció eredménye egy olyan ütközési zóna vagy forrás kialakulását mutatja, mely jobban jellemezhető egy háromszög alakú transzverz síkban, mint egy ellipszissel. Ugyanígy elképzelhető általánosabb szimmetriával leírható forrás is.



11. ábra. Egy arany-arany atommagütközés Glauber szimulációján [100] jól megfigyelhető a kialakuló háromszög alakú forrás [101].

Az aszimmetria különösen látványos az azt feltárni kívánó, dedikált kísérletekben, például a PHENIX detektornál mért deuteron-arany ütközésekben [102], amely kísérletből  $v_3(p_T)$  adatokat határoztak meg. Ilyen méréseket réz-arany [103] rendszerben is végeztek. Ugyancsak a PHENIX kísérletben vizsgálták a HBT sugarak harmadrendű oszcillációit is arany-arany ütközésekben [98]. Ezen analízis eredménye látható a 12. ábrán.

Az alábbiakban a Buda–Lund-modellt általánosítom úgy, hogy alkalmas legyen tetszőleges rendű aszimmetria leírására. Először a gömbszimmetrikus majd az elliptikus modellt tárgyalom, s bemutatom azon mennyiségeket, melyeken keresztül az aszimmetria bevezethető. A modell általánosítása után megvizsgálom a másod-, illetve harmadrendű aszimmetriák hatását a mérhető mennyiségekre. Megmutatom, hogy a térbeli és a sebességtérbeli aszimmetria egyaránt



12. ábra. A PHENIX kísérletben, Au+Au ütközésekben  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV ütközési energián mért másod- és harmadrendű azimutális HBT oszcillációk [98].

befolyásolja az aszimmetriát jellemző paraméterek értékeit, de megfelelő kísérleti adatok birtokában a kétféle hatás szétválasztható. A fejezet végén a modell analitikus megoldásokkal való lehetséges kapcsolatát is tárgyalom.

Előbb azonban röviden áttekintem a Buda–Lund-modell korábbi alakjait: a gömbszimmetrikus, nem-relativisztikus alakot és az ellipszoidális relativisztikus felírást.

### 5.1. A nem-relativisztikus Buda–Lund-modell

A Buda–Lund-modell egy olyan végállapotbeli parametrizáció, melyet hidrodinamikai modellként vezettem be a 3.3. szakaszban. Első verzióját a [46] cikkben írták le. Az adatokra való alkalmazásával többek között a [80, 96, 104, 105] cikkek foglalkoztak SPS és RHIC adatokra.

A korábban leírtaknak megfelelően a forrásfüggvényt szorzatalakban adja meg:

$$S(x, p) = f_B(\mathbf{r}, p)I(\mathbf{r})H(t) \quad (138)$$

ahol

$$\begin{aligned} f_B(\mathbf{r}, p) &= C e^{-\frac{(p - m\mathbf{u}(\mathbf{r}))^2}{2mT}} \\ I(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi R_G^2} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{2R_G^2}} \\ H(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t^2}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\Delta t^2}} \end{aligned} \quad (139)$$

függvények rendre, a Maxwell–Jüttner-eloszlást közelítő  $f_B$  Boltzmann-eloszlás, a forrás térbeli struktúráját jellemző  $I(\mathbf{r})$  Gauss-eloszlás és a  $H(t)$  sajátidő eloszlás. A Boltzmann-eloszlás akkor érvényes közelítés, ha a kifagyáskor a rendszer elég ritka. A vastag betűvel szedett mennyiségek hármasmennyiségek, a modell nem-relativisztikus. A felírt alakban gömbszimmetrikus forrást ír le, de általánosítható ellipszoidális szimmetria leírására is (ld. pl. [96]).

## 5.2. A relativisztikus Buda–Lund-modell

A Buda–Lund-modell relativisztikusan továbbfejlesztett alakja a realiztikusabb ellipszoidális geometriát leíró térbeli és sebességtérbeli eloszlásfüggvényt feltételező, [97] cikkben közölt felírás. Az előző modell szerkezetét megtartva, relativisztikus rendszert feltételezve, a következő függvényeket használhatjuk.

$$\begin{aligned} f_{MJ}(x, p) &= \frac{g}{(2\pi)^3} e^{-\frac{p_\mu u^\mu - \mu}{T}} \\ I(x) &= p^\mu u_\mu(x) d^4x \\ H(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau^2}} e^{-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}}. \end{aligned} \quad (140)$$

ahol  $x$  négyes koordináta,  $\tau$  a sajátidő,  $g$  pedig a degenerációs faktor. A forrásfüggvény alakja

$$S(x, p) d^4x = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu u_\mu(x) H(\tau) d^4x}{f_{MJ}(x, p) + s_q} \quad (141)$$

lesz, ahol  $s_q$  a kvantumstatisztikát meghatározó tag ( $s_q = 0$  Boltzman-,  $s_q = -1$  Bose–Einstein-,  $s_q = 1$  Fermi–Dirac-statisztikát jelenti).

A modellbe az ellipszoidális szimmetriát két mennyiségen keresztül is be kell építeni. Az egyik a térbeli szimmetria, a másik a sebességtérbeli szimmetria. Előbbit egy  $s$  skálaparaméter segítségével lehet megtenni, utóbbit pedig az  $u_\mu$  sebességtér megfelelő megválasztásával. Ezek a következő alakot öltik:

$$s = \frac{r_x^2}{2X^2} + \frac{r_y^2}{2Y^2} + \frac{r_z^2}{2Z^2}, \quad (142)$$

$$u_\mu = \left( \gamma, r_x \frac{\dot{X}}{X}, r_y \frac{\dot{Y}}{Y}, r_z \frac{\dot{Z}}{Z} \right), \quad (143)$$

ahol az  $r_x, r_y, r_z$  a koordinátákat,  $X, Y, Z$  időfüggő függvények pedig az ellipszoid nagytengelyeinek hosszait jelölik. A  $\gamma$  az  $u_\mu u^\mu = 1$  normálásból adódó Lorentz-faktor. Az  $s$  skálaparaméter vagy skálaváltozó, amelyen keresztül a térbeli geometriát fejeztük ki, tulajdonképpen azt írja le, hogy a termodinamikai mennyiségek milyen alakú felületen állandóak. Mivel mind az  $s$  mind az  $u_\mu$  egy ellipszoidnak felel meg, a modell egy, a térben és a sebességtérben is ellipszoidális szimmetriát mutató forrást feltételez.

A sebességtér a Cooper–Frye-faktoron és a Maxwell–Jüttner-eloszláson keresztül van a modellbe építve, míg a térbeli aszimmetria az ún. fugacitáson és a hőmérsékletprofilon keresztül:

$$\frac{\mu(x)}{T(x)} = \frac{\mu_0}{T_0} - bs \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} (1 + as^2). \quad (144)$$

ahol az  $a$  paraméter a hőmérséklet gradienst  $b$  paraméter pedig a sűrűség gradienst jellemzi. Az elliptikus modellt először a [97] cikkben írták le, ahol nyeregpontri közelítéssel megadták az invariáns spektrumot és az elliptikus folyást zárt alakban. A későbbi [106] cikkben a HBT sugarak

másodrendű oszcillációit is kiszámolták, s megmutatták, hogy az azimutális HBT sugarak és az elliptikus folyás együtt befolyásolják a térbeli és a sebességtérbeli aszimmetriaparaméterek értékeit. A modellt adatokhoz is illesztették [107].

A hidrodinamikai megoldásoknál láttuk, hogy a skálaparaméter együttmozgó deriváltja el kell, hogy tűnjön:  $u^\mu \partial_\mu s = 0$  (ld. a (65) egyenlet). Ellenőrizhető, hogy ez az elliptikus Buda–Lund-modellnél is igaz lesz, noha egy hidrodinamikai parametrizáció esetén ez nem szükségszerű. Azonban ha teljesül ez a feltétel, akkor a modell segítségével meg lehet sejteni hidrodinamikai megoldásokat (ld. pl. az említett [37, 39] cikkeket), ezért az általánosított modell esetében is vizsgálni fogom ezt a feltételt.

### 5.3. A Buda–Lund-modell általánosítása

Az általánosítás célja, hogy magasabb rendű, általánosabb szimmetriákat is le tudjunk írni a Buda–Lund-modell keretében mind a koordináta-, mind a sebességtérben. A 3.3.1. szakaszban megadott (83) recept alapján a Buda–Lund-modell forrásfüggvénye általános aszimmetriák esetén is

$$S(x, p)d^4x = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu u_\mu(x) H(\tau) d^4x}{f_{MJ}(x, p) + s_q}. \quad (145)$$

Az általánosítás során pillanatszerű kifagyást teszünk fel vagyis a sajátidő eloszlást egy Dirac-féle  $\delta$ -függvénnyel jellemezzük. Így a Cooper-Frye prefaktort a következő alakban írhatjuk:

$$p^\mu d^4\Sigma_\mu(x) = p^\mu u_\mu(x) \delta(\tau - \tau_0). \quad (146)$$

A négyes sebességprofil Hubble-típusúnak tesszük fel. A fugacitás tagot és hőmérsékletprofilot ugyanolyan alakúnak választjuk, mint az ellipszoidális modell esetén:

$$\frac{\mu(x)}{T(x)} = \frac{\mu_0}{T_0} - bs \qquad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0}(1 + as) \quad (147)$$

Az általánosított szimmetria leírására az  $s$  skálaváltozót és a sebességteret kell alkalmassá tenni. Ezeket a következő két szakaszban fejtem ki.

#### 5.3.1. A térbeli aszimmetria általánosítása

Az  $s$  skálaparaméter a paraméter azt írja le, hogy milyen alakúak a termodinamikai szempontból „ekvipotenciális” felületek azaz, milyen alakú felület mentén azonos értékűek a termodinamikai mennyiségek. Az ellipszoidális Buda–Lund-modell esetén a skálaparaméter egy háromtengelyű ellipszoid volt:

$$s = \frac{r_x^2}{X^2} + \frac{r_y^2}{Y^2} + \frac{r_z^2}{Z^2}. \quad (148)$$

Az aszimmetria a transzverz síkban bevezethető hengerkoordinátákban ( $x = r \cos(\alpha)$  és  $y = \sin(\alpha)$ ), melyekkel a skálaváltozó alakja

$$s = \frac{r^2}{R^2}(1 + \varepsilon_2 \cos(2\alpha)) + \frac{r_z^2}{Z^2} \quad (149)$$

lesz, ahol  $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} \right)$  és  $\varepsilon_2 = \frac{Y^2 - X^2}{X^2 + Y^2}$ , azaz  $X = R/\sqrt{1 + \varepsilon_2}$  és  $Y = R/\sqrt{1 - \varepsilon_2}$ . A hengerkoordinátás alakból természetesen adódik a harmadrendű, trianguláris aszimmetriát leíró skálaparaméter alakja:

$$s = \frac{r^2}{R^2}(1 + \varepsilon_3 \cos(3\alpha)) + \frac{r_z^2}{Z^2}. \quad (150)$$

E logika szerint a tetszőleges  $n$ -pólusú aszimmetriához tartozó skálaparamétert felírhatjuk

$$s = \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \sum_n \varepsilon_n \cos(n(\alpha - \alpha_n)) \right) \quad (151)$$

alakban. Így nem csak egy, hanem tetszőleges számú aszimmetria hatását figyelembe vehetjük. A skálaparaméter általánosítása a [45] megoldásban is hasonlóan történt. Az  $\alpha_n$  itt a reakciósík szögét jelenti, amely síkban az  $n$ -ed rendű aszimmetriát vizsgáljuk,  $\alpha$  pedig a térbeli azimutszög. A későbbi fejezetekben  $\alpha$  a Lévy-exponenst jelöli, de nincs szükség külön jelölésre, mert együtt nem fordul elő az azimutszög és a Lévy-exponens.

### 5.3.2. A sebességtér általánosítása

Az idézett [45] multipólus megoldáshoz képest a modellben többlet, hogy a sebességtérbeli aszimmetriát is figyelembe veszi, míg a megoldásban gömbszimmetrikus, Hubble-típusú sebességmező szerepel. A modell eddigi változataihoz képest nem Descartes-koordinátákat, hanem hengerkoordinátákat használunk, csakúgy mint a skálaváltozó általánosításához, hisz a térbeli aszimmetria esetén ez a felírás egy természetes általánosíthatósághoz vezetett. A sebességteret azonban a potenciálján keresztül lehet ilyen módon általánosítani. A potenciálokkal felírt sebességmező

$$u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}) = \gamma(1, \partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi) \quad (152)$$

alakú. Visszakapjuk az ellipszoidális esetet, ha a  $\Phi$  potenciált a

$$\Phi = \frac{H_x}{2} r_x^2 + \frac{H_y}{2} r_y^2 + \frac{H_z}{2} r_z^2 \quad (153)$$

alakban írjuk fel. Elvégezve a deriválásokat a  $\mathbf{v} = (H_x r_x, H_y r_y, H_z r_z)$  alakhoz jutunk. Ugyanez a potenciál hengerkoordinátákban felírható, mint

$$\Phi = \frac{H}{2} r^2 (1 + \chi_2 \cos(2\alpha)) + \frac{H_z}{2} r_z^2, \quad (154)$$



Részecske tömeg	$m$	140 MeV/c <sup>2</sup>
Kifagyási idő	$\tau_0$	7 fm/c
Kifagyási hőmérséklet	$T_0$	170
Hőmérséklet gradiens paraméter	$a^2$	0,3
Sűrűség gradiens paraméter	$b$	-0,1
Transzverz méret	$R$	10 fm
Longitudinális méret	$Z$	15 fm
Transzverz tágulás	$\dot{R}$	1
Longitudinális tágulás	$\dot{Z}$	0,94

1. táblázat. A modell vizsgálata során használt paraméterek értékeinek megválasztása során a kísérletekkel való összehangra törekedtem.

ahol bevezettük a  $\chi_2 = \frac{H_y - H_x}{H_x + H_y}$  sebességtérbeli aszimmetriát leíró paramétert. Látható, hogy általánosítás ugyanolyan természetes módon felírható, mint a térbeli aszimmetriák esetén, s így az  $n$ -ed rendű multipólus potenciál a

$$\Phi = \frac{H}{2} r^2 \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n \cos(n(\alpha - \alpha_n)) \right) + \frac{\dot{Z}}{2\dot{Z}} r_z^2 \quad (155)$$

alakban írható, amiből a (152) egyenlet alapján a sebességtér megadható.

## 5.4. Mérhető mennyiségek az általánosított Buda–Lund-modellből

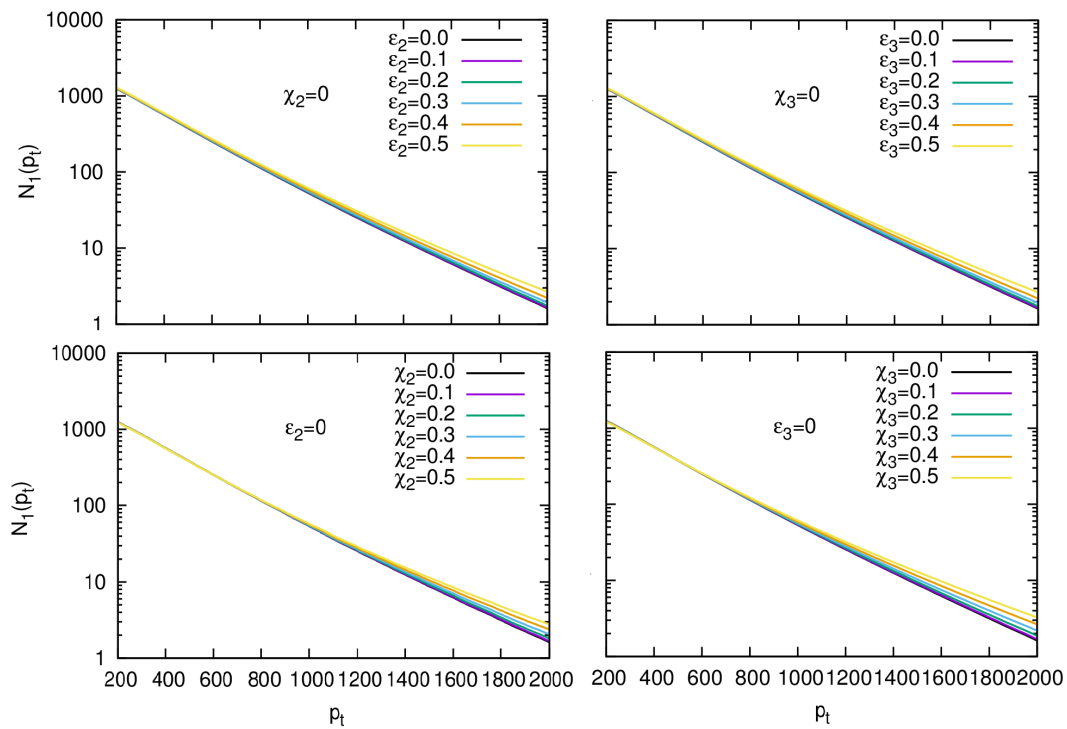
A Buda–Lund-modell korábbi felírásai esetén kiszámolhatóak voltak megfigyelhető mennyiségek. A relativisztikus és ellipszoidális esetben a 3.3.2. szakaszban tárgyalt integrálokat, melyek a mérhető mennyiségek definícióiban szerepelnek nyeregponthoz közeli közelítésben lehetett kiszámolni. A tetszőleges szimmetriát leíró modellben a nyeregponthoz közeli közelítéssel sem lehet elvégezni az integrálokat, így numerikus módszereket kell alkalmazni, hogy megvizsgálhassuk az aszimmetria paraméterek hatását az egyes mérhető mennyiségekre. Néhány paraméternek értéket kell adnunk ehhez, amely értékeket az 1. táblázat foglalja össze.

### 5.4.1. Invariáns transzverz impulzuseloszlás

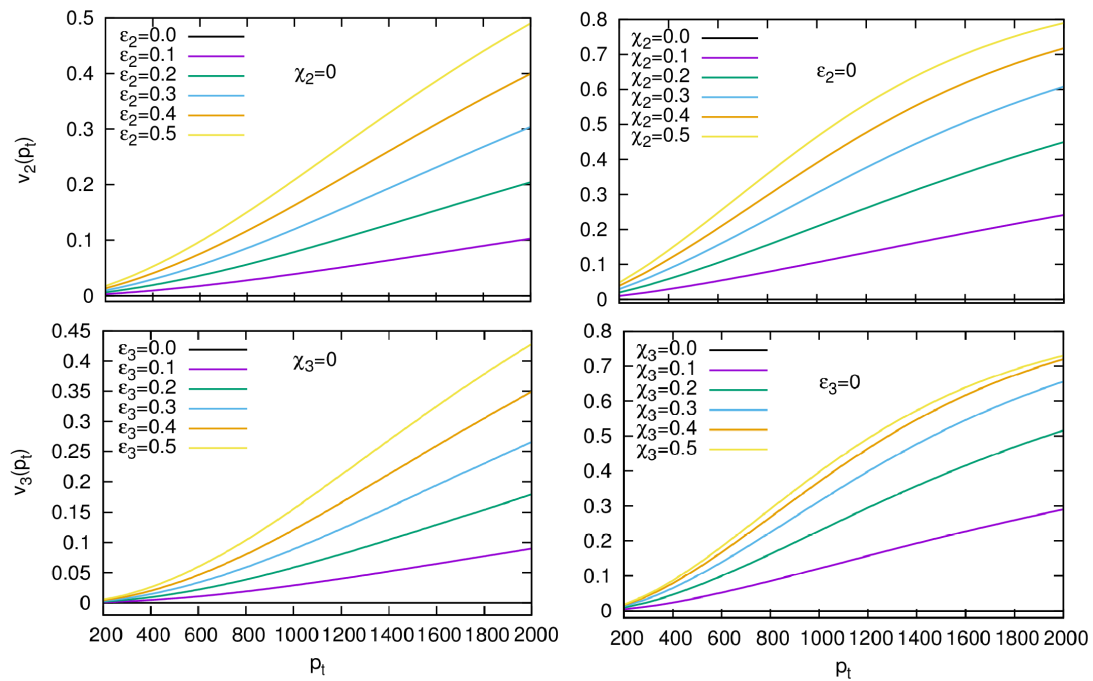
A transzverz impulzuseloszlás az invariáns impulzuseloszlás azimut szögtől független része, azaz

$$\frac{d^2 N}{p_T dp_T dy} = \int_0^{2\pi} d\varphi N_1(p) = \int_0^{2\pi} d\varphi d^4 x S(x, p) \quad (156)$$

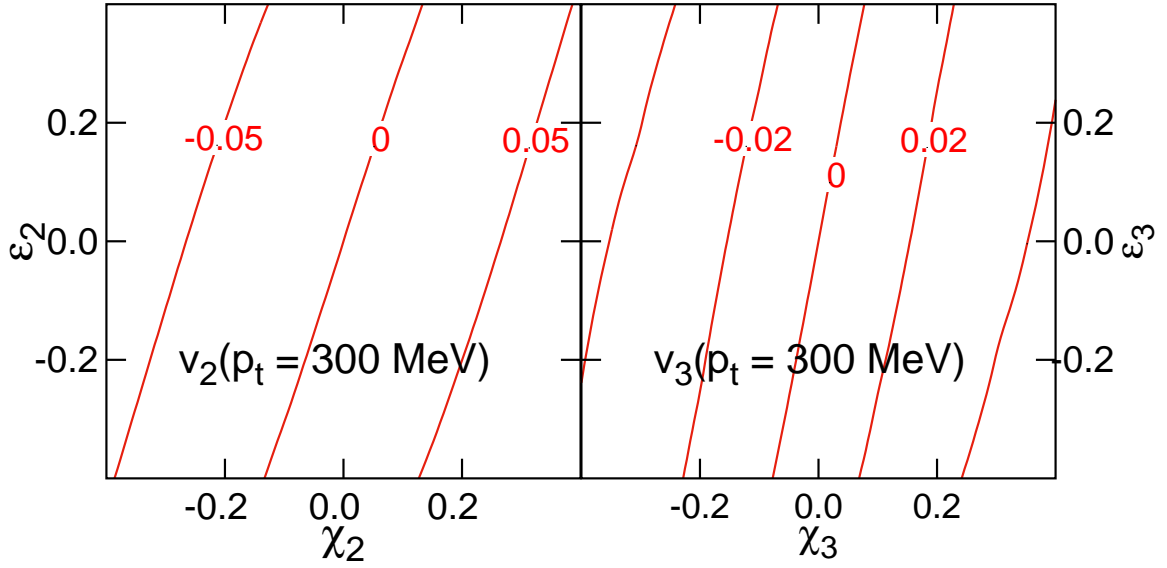
módon számolható ki. A különböző aszimmetriák hatása az impulzuseloszlásra a 13. ábrán látható. Megfigyelhető, hogy az azimutszögre kiintegrált spektrum enyhén módosul nagy  $p_T$ -k esetén az aszimmetriák hatására. Ez azért van, mert a modellben az aszimmetria módosítja az effektív térfogatot, főleg nagy  $p_T$ -n.



13. ábra. Az különböző fajtájú és rendű aszimmetria paraméterek változásának hatása a invariáns spektrumra.



14. ábra. Az aszimmetria paraméterek hatása a különböző folyási koefficiensekre.



15. ábra. A modelltől számolt  $v_2$  (balra) és  $v_3$  (jobbra) folyási együtthatók értékei 300 MeV/c transzverz impulzusnál különböző aszimmetriaparaméter értékek mellett. A kontúrvonalak egy-egy adott folyási koefficiens értéket jelölnek (a pontos érték a vonalon van feltüntetve), a tengelyeken pedig az aszimmetriaparaméterek értékei vannak.

#### 5.4.2. A $v_2$ és $v_3$ folyások

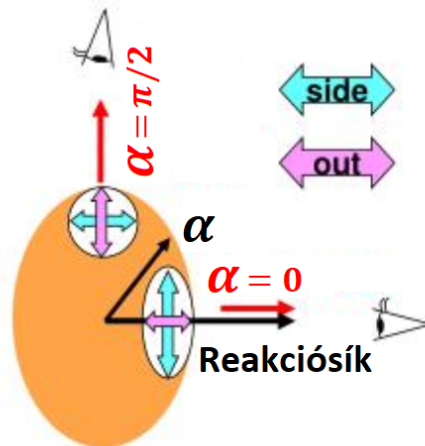
Az elliptikus és trianguláris folyásokat a (88) egyenletben megadott

$$v_n = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi N_1(p_T, \varphi) \cos(n\varphi)}{\int_0^{2\pi} d\varphi N_1(p_T, \varphi)} = \langle N_1(p_T, \varphi) \cos(n\varphi) \rangle_\varphi \quad (157)$$

definícióból lehet kiszámolni. A különböző paraméterek hatása az elliptikus, illetve a trianguláris folyásokra a 14. ábrán látható.

Természetesen az  $n$ -ed rendű aszimmetria paraméter csak az  $n$ -ed rendű folyási koefficiensekre van hatással. Az ábrán megfigyelhető, hogy az  $n$ -ed rendű térbeli és sebességtérbeli aszimmetria is hatással van a  $v_n$  folyási koefficiensek értékeire. Ebből következően csupán a  $v_n$  mérése nem alkalmas arra, hogy meghatározzuk az impulzustérbeli aszimmetria mértékét, mivel azt a koordinátatérbeli aszimmetria is befolyásolja. Más szóval elképzelhető  $\chi_n = 0$  sebességtérbeli aszimmetria mellett véges, nem nulla  $v_n$  folyást mérni. Szemléletesen ábrázolható ez az összefonódás, ha egy konkrét  $p_T$  értéknél ábrázoljuk a folyások különböző értékeit az aszimmetria paraméterek értékeinek változtatásával egy rögzített  $p_T$  transzverz impulzus esetén. Ez látható a 15. ábrán, melyen a  $v_2(p_T = 300 \text{ MeV}/c)$  és a  $v_3(p_T = 300 \text{ MeV}/c)$  értékeit ábrázoltam különböző  $\varepsilon_{2,3}$  és  $\chi_{2,3}$  esetén. Látszik, hogy egy adott  $v_2(p_T = 300 \text{ MeV}/c)$  érték különböző  $\varepsilon_2$  és  $\chi_2$  érték mellett is megvalósulhat, s ugyanez igaz a  $v_3$ -ra is. Az is megfigyelhető, hogy a kontúr vonalak középpontosan szimmetrikusak az  $(\varepsilon_n = 0, \chi_n = 0)$  pontra, ami  $(\varepsilon_2, \chi_2) \leftrightarrow (-\varepsilon_2, -\chi_2)$  szimmetriának felel meg.

Adható azonban egy módszer, amellyel feloldható a probléma, de ehhez szükséges egy má-



16. ábra. Egy nem gömbszimmetrikus forrás esetén a HBT sugár nagysága függ attól, hogy milyen  $\alpha$  térbeli azimutszögből „nézünk rá”.

sik mérhető mennyiség, az ún. azimutálisan érzékeny HBT sugár, amelyet a következő 5.4.3. szakaszban tárgyalok. E két mérhető mennyiséggel lehetővé válik az aszimmetriaparaméterek kísérleti meghatározása, amint azt majd az 5.4.4. szakaszban mutatom be.

### 5.4.3. Azimutális HBT-sugarak

A korrelációs függvényeket 3D-ben mérve a forrás térbeli alakjáról szerezhethetünk információt. A térbeli eloszlásról az azimutszögtől függő, vagy azimutális HBT sugarak mérésével alkothathunk képet. A HBT sugarak szögfüggését a 16. ábra szemlélteti. Egy ellipszoidális forrás esetén a HBT sugarak azimutszögtől való függése  $\cos(2\alpha)$  függvénnyel írható le. Ez a Buda-Lund-modell hengerkoordinátákba való átírása után is látszik, de a 16. ábráról is látszik. Tetszőleges,  $n$ -ed rendű aszimmetriával rendelkező forrás esetén  $\cos(n\alpha)$  függvény írja le a HBT sugarak azimutszögfüggését. Az ellipszoidális esetben a másodrendű azimutális HBT sugarakat elő lehetett állítani analitikus formában és a modellt adatokkal is össze lehet hasonlítani [106, 107].

A 4.4.2. fejezetben amellett érveltem, hogy a korrelációs függvények alakja nem gaussi. Azonban ha eltekintünk a rezonanciák jelenlététől, egy hidrodinamikai modell kidolgozásakor a 3D korrelációs függvények közelíthetőek Gaussnak. A modell kidolgozása során a korrelációs függvények szélességének oszcillációit vizsgáltuk.

Az általános  $n$ -ed rendű esetben nem lehetett analitikus formulákkal megadni az azimutális HBT-sugarakat, numerikus integrálást kell végezni. Mindenekelőtt érdemes felsorolni a használatban lévő szögeket:

- $\varphi$  a részecskekibocsátás azimutszöge
- $\psi_n$  az  $n$ -ed rendű reakciósík szöge
- $\alpha$  a térbeli azimutszög

- $\alpha_n$  a forrásfüggvény térbeli azimutfüggésének fázisa, ahol  $n$  a szimmetria rendjét jelöli (más lehet a fázis másod- és harmadrendben).

Ezen négy szög közül a kísérletekben csak a  $\varphi$  és a  $\psi_n$  mérhető, míg az  $\alpha$  és az  $\alpha_n$  közvetlenül nem meghatározható. A HBT sugarak vizsgálatához a Bertsch–Pratt-féle *out-side-long* parametризációt használjuk a pár longitudinális tömegközépponti rendszerében (LCMS). Az LCMS rendszerben a pár impulzusának longitudinális komponense nulla, a pár átlagimpulzusa határozza meg az *out* irányt, erre merőleges a jobbkéz-szabály szerint a *side* komponens, ahogy azt a 4.4.1. szakaszban leírtam. A forrást különböző térbeli szögek irányából vizsgálva szögfüggés jelenik meg (ld. 16. ábra) a részecske emisszióban. Azonban ha a homogenitási régiók változnak az azimutális szög függvényében, más szóval a forrás nem gömbszimmetrikus, akkor egy explicit azimutszög függés jelenik meg a korrelációs sugarakban. Ezt a *out* és az *side* komponensek esetén a következőképpen írhatjuk:

$$\begin{aligned} r_{out} &= r \cos(\alpha - \varphi) \\ r_{side} &= r \sin(\alpha - \varphi) \end{aligned} \quad (158)$$

ahol a  $\varphi$  azimutszöget a részecskék kibocsátásának iránya határozza meg. Ezen jelölésekkel az azimutális Gauss HBT sugarak a következőképpen fejezhetőek ki:

$$R_{out}^2 = \langle (r_{out} - \beta_T t)^2 \rangle - \langle r_{out} - \beta_T t \rangle^2 \quad R_{side}^2 = \langle r_{side}^2 \rangle - \langle r_{side} \rangle^2 \quad (159)$$

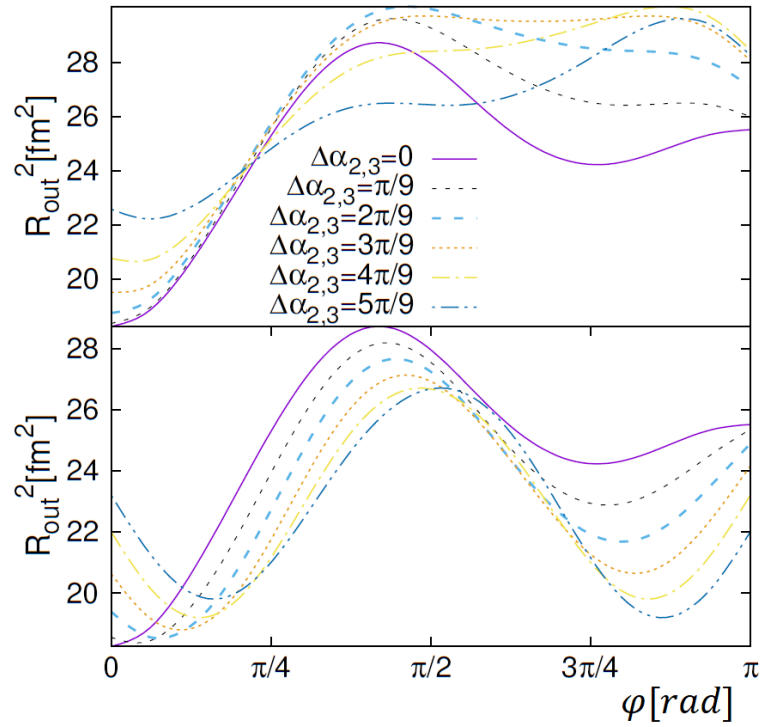
ahol  $\beta_T = \frac{p_T}{\sqrt{p_T^2 + m^2}}$ ,  $p_T$  pedig a pár átlagos transzverz sebessége és bevezettem a

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int d^4x f(x) S(x, K)}{\int d^4x S(x, K)} \quad (160)$$

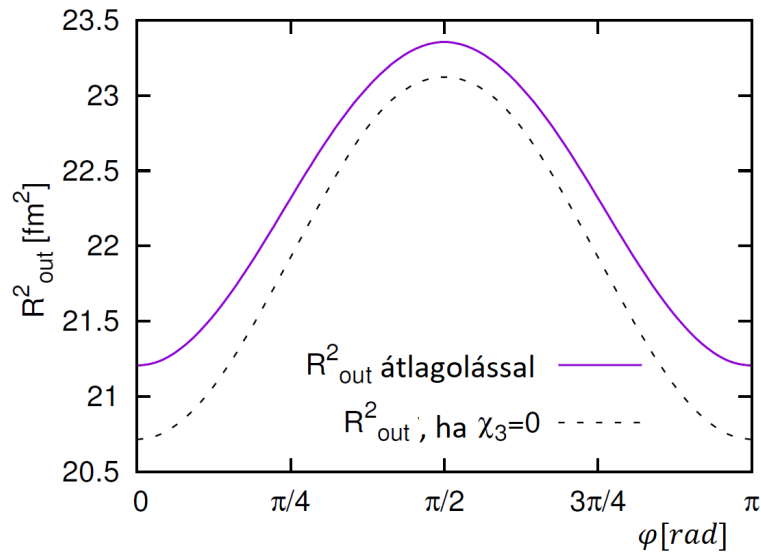
jelölést. Így meghatározhatóak a korrelációs sugarak azimutszög függései.

Kísérletileg a forrás alakja eseményről eseményre változik, így ahhoz, hogy az  $n$ -edrendű aszimmetriát vizsgálhassuk a rendszert be kell forgatni az  $n$ -edrendű reakciósíkba, amit a forgatás szögével,  $\psi_n$ -nel jellemezhetünk. Ezután a forgatás után csak az  $n$ -edrendű oszcillációk maradnak (és az egész számú többszörösei). Kísérletileg ez a forgatás a  $\Delta\psi_{2,3} = \psi_2 - \psi_3$  szögre való átlagolást jelenti, ahol  $\psi_2$  és  $\psi_3$  rendre a másod- és harmadrendű reakciósík szöge. Ahhoz, hogy a modellszámolásokból láthassuk két, például a másod- és harmadrendű aszimmetria hatását, másként kell eljárunk.

A modell analízise során a korrelációs függvény  $\varphi$ -függésére való átlagolás hatását vizsgáltuk. Rögzítettünk minden anizotrópiaparamétert, csak egy változó maradt szabad, az  $\Delta\alpha_{2,3} = \alpha_2 - \alpha_3$  fáziskülönbség. (A modell többi paraméterének értékét az 1. táblázatban felsorolt értékekre rögzítve tartjuk a modell teljes analízise során.)  $\Delta\alpha_{2,3}$  különböző értékei mellett vizsgáltuk az  $R_{out}$  mennyiséget a  $\varphi$  függvényeként. Azzal, hogy  $\alpha_2$ -t és  $\alpha_3$ -at megválasztottuk, tulajdonképpen a forrást forgattuk el. A kísérletekben általában a reakciósíkot forgatják el  $\psi_2$  vagy  $\psi_3$  szöggel. Adott körülmények között ennek a két megközelítésnek meg kell egyeznie, így a  $\Delta\psi_{2,3} = 0$  választást tettük. A vizsgálat eredményét mutatja a 17. ábra.



17. ábra. A különböző másod- és harmadrendű aszimmetriák együttes hatása az azimutális HBT sugarakra a forrást  $\alpha_2 = 0$  (fent) és  $\alpha_3 = 0$  (lent) irányba forgatva.



18. ábra. A HBT-sugár szögfüggése az átlagolós módszerrel, illetve a megfelelő aszimmetria paramétereiket nullának választva.

A modellből a másod- vagy a harmadrendű aszimmetria úgy is eltüntethető, ha a megfelelő aszimmetria paramétereiket nullának választjuk. Például, ha a másodrendű aszimmetriákat vizsgáljuk, akkor a modellben az  $\varepsilon_3 = \chi_3 = 0$  választással élhetünk. Azonban a kísérletben nem ez történik, így megvizsgáltam, hogy van-e különbség az átlagolós eljárás és a nullának választás módszere között.

Vizsgáljuk meg az átlagolás hatását analitikusan is! Mivel modell forrásfüggvényének integrálja nem adható meg zárt alakban, ezért egy leegyszerűsített modellen vizsgáltam meg a kérdést. Legyen a skálaparaméter és legyen a forrásfüggvény

$$s = \frac{r^2}{R^2}(1 + \varepsilon_2 \cos(2\alpha + \Delta\alpha_{23}) + \varepsilon_3 \cos(3\alpha)) + \frac{r^2}{Z^2} \quad S_{\text{egysz}}(x) = e^{-s} \quad (161)$$

alakban adott (egysz index az egyszerűsített szót rövidíti). Ekkor az átlagolás során

$$S_{\text{egysz,átl}}(x) = \langle S_{\text{egysz}}(x) \rangle_{\Delta\alpha_{23}} = I_0 \left( \varepsilon_3 \frac{r^2}{R^2} \right) e^{-\frac{r^2}{R^2}(1+\varepsilon_2 \cos(2\alpha))} \quad (162)$$

adódik, ahol  $I_0$  a nullad rendű módosított Bessel-függvény. Ha ezt kiátlagoljuk  $\alpha$ -ra, az

$$\int d\alpha S_{\text{egysz,átl}}(x) = 2\pi e^{-\frac{r^2}{R^2}} I_0 \left( \varepsilon_2 \frac{r^2}{R^2} \right) I_0 \left( \varepsilon_3 \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (163)$$

eredmény adódik. Ha viszont az  $\varepsilon_3 = 0$  választással élünk a (161) egyenletekben és így végezzük el az  $\alpha$ -ra való átlagolást, akkor a

$$\int d\alpha S_{\text{egysz,null}}(x) = 2\pi e^{-\frac{r^2}{R^2}} I_0 \left( \varepsilon_2 \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (164)$$

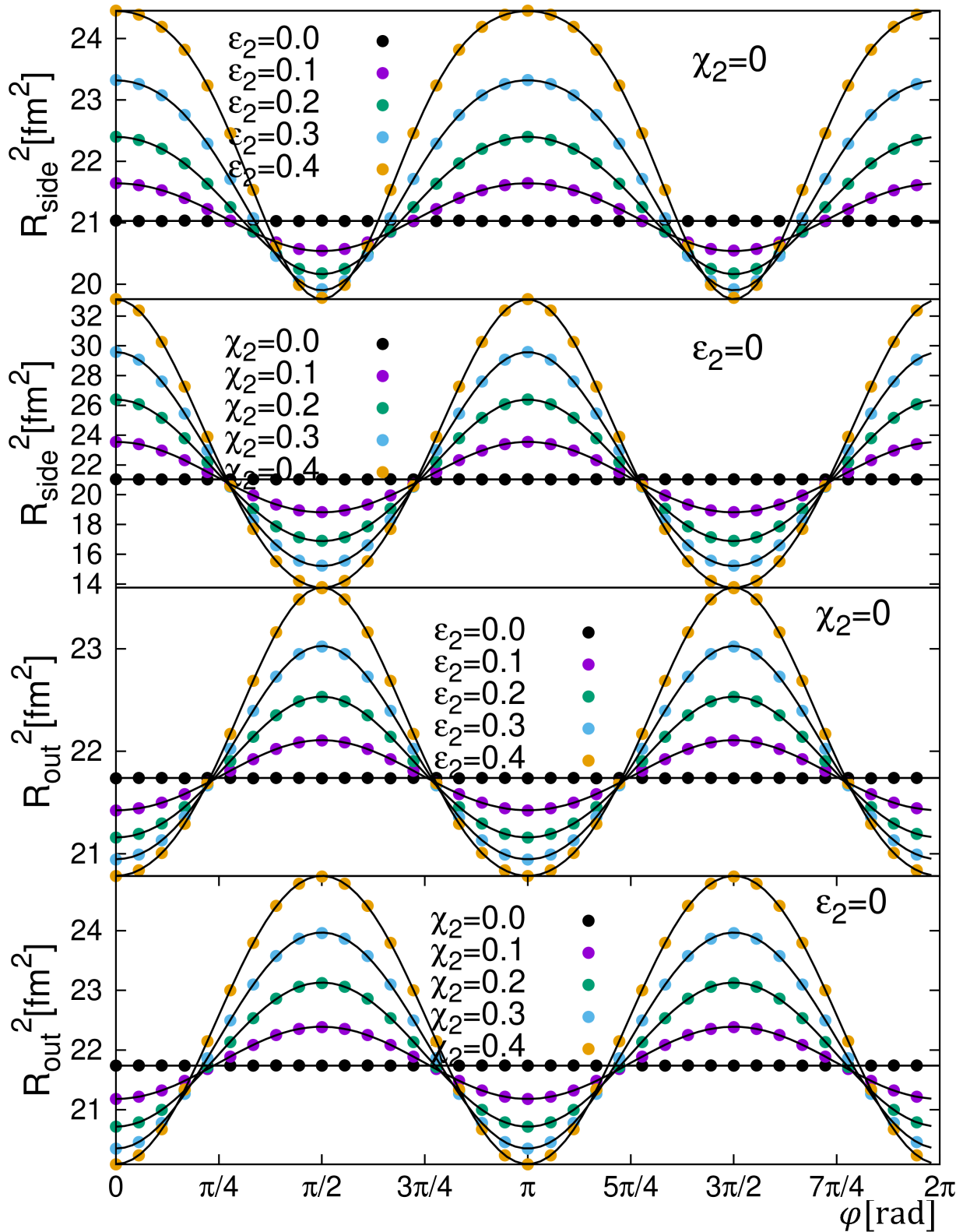
eredményre jutunk. Tehát a két módszerrel, az  $\Delta\alpha_{2,3}$ -ra való átlagolással és a megfelelő aszimmetriaparaméter nullának választásával eltérő eredményeket kaptunk ebben az egyszerűsített modellben. Ez a különbség az általánosított modell esetén is kimutatható az integrálokat numerikusan kiszámítva, amint az a 18. ábrán is látható. Megfigyelhető, hogy a különbség a két módszer között a modellünk esetén nem számottevő, és lényegében csak egy függőleges eltolást jelent. Ezért a további vizsgálatok során az egyszerűség kedvéért a megfelelő aszimmetria paramétert nullának választom, és nem az átlagolós módszert használom.

Vizsgáljuk meg ezután az aszimmetriák hatását az azimutális HBT sugarakra másod- és harmadrendben a megfelelő paraméterek nullának választásával! Az eredmények a 19. és a 20. ábrán láthatóak, és két fontos dolgot mutatnak.

Jól látható, hogy mindkét esetben a jellemző  $\cos(2\varphi)$  és  $\cos(3\varphi)$  mellett magasabb rendű oszcillációk is megjelennek [108]. Ha bevezetjük a

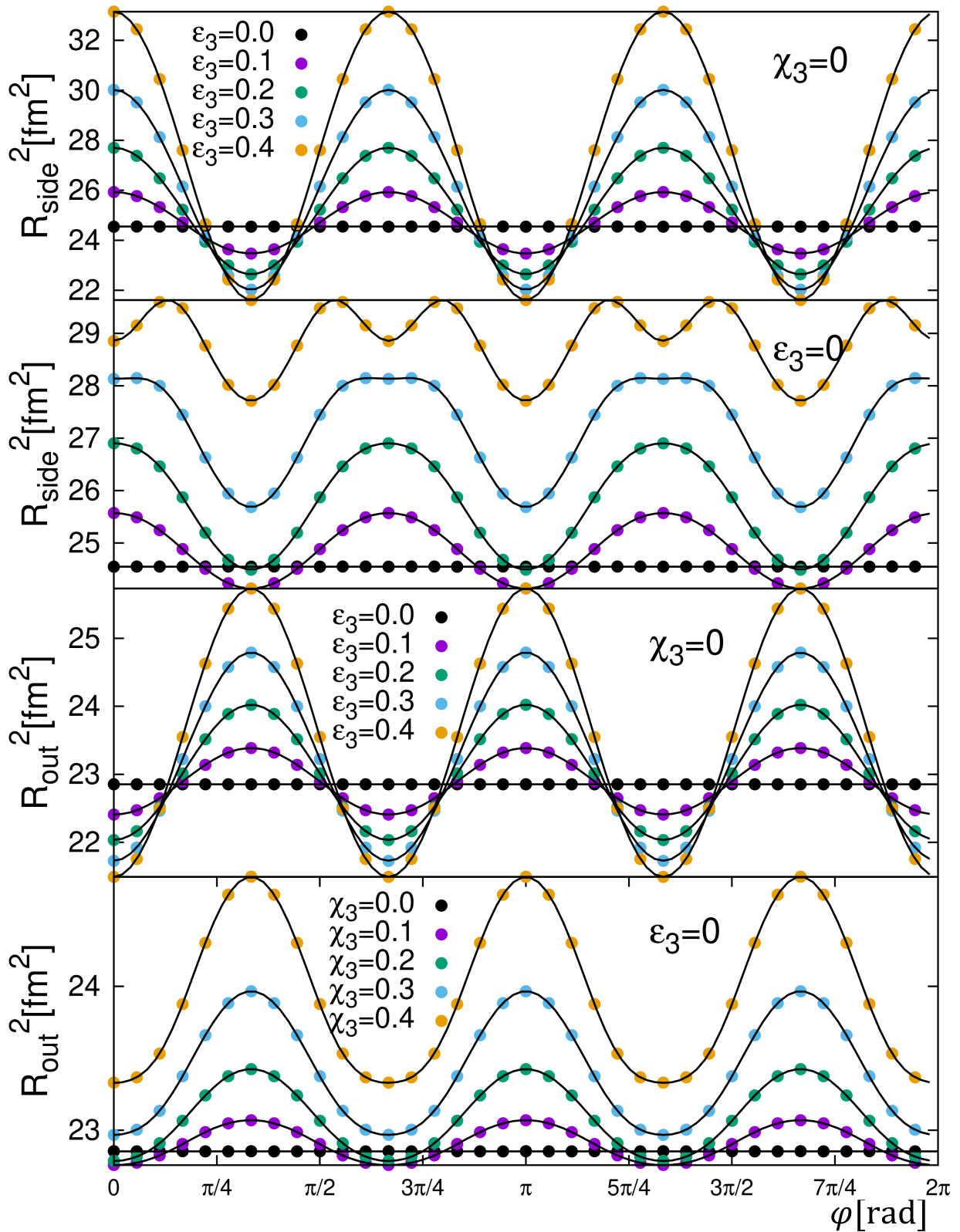
$$\begin{aligned} R_{i,2}^2 &= R_{i,2,0}^2 + R_{i,2,2}^2 \cos(2\varphi) + R_{i,2,4}^2 \cos(4\varphi) + R_{i,2,6}^2 \cos(6\varphi) \\ R_{i,3}^2 &= R_{i,3,0}^2 + R_{i,3,3}^2 \cos(3\varphi) + R_{i,3,6}^2 \cos(6\varphi) + R_{i,3,9}^2 \cos(9\varphi) \end{aligned} \quad (165)$$

alakú parametrizációt (ahol az  $R_{i,j,k}^2$  az  $i = out, side$  irány  $j$ -ed rendű oszcillációjában a  $k$ -ad rendű komponens amplitúdóját jelöli), látható, hogy a magasabb rendű amplitúdók sem

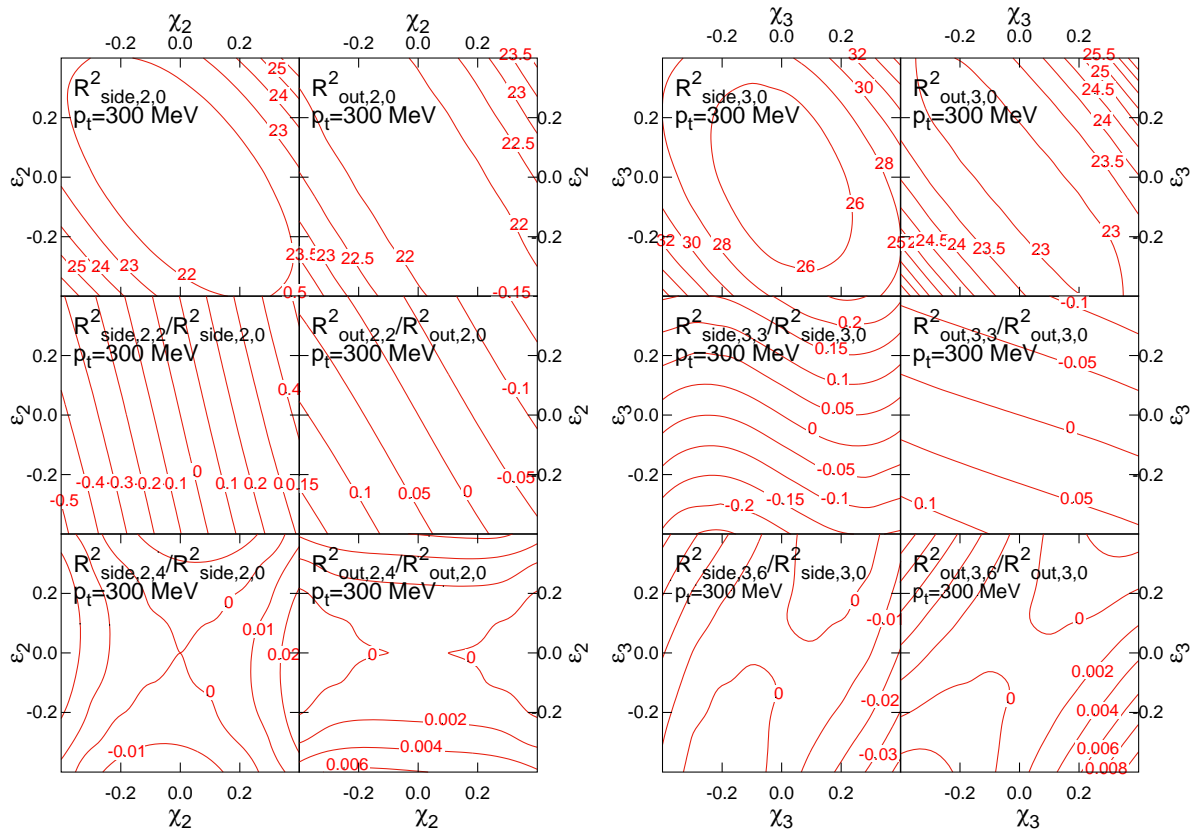


19. ábra. Másodrendű HBT oszcillációk különböző aszimmetriaparaméterek esetén az általánosított Buda-Lund-modellből és azok parametrizációja a (165) alakú függvényekkel.





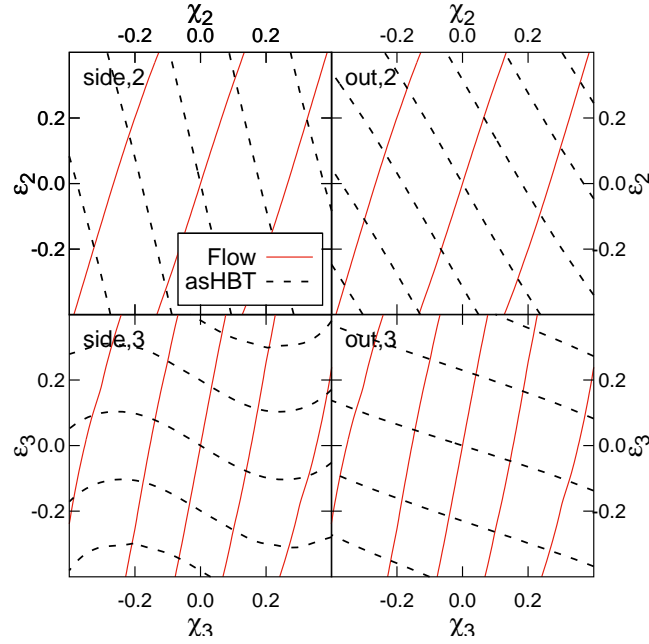
20. ábra. Harmadrendű HBT oszcillációk különböző aszimmetriaparaméterek esetén az általánosított Buda-Lund-modellből és azok parametrizációja a (165) alakú függvényekkel.



21. ábra. Az aszimmetria paraméterek külön-külön hatással vannak az azimutfüggő HBT sugarakra, értékeik a HBT sugarak mérésével nem választhatók szét. A nulladrendű taggal normált amplitúdókat ábrázoltam. Látható, hogy az ábrák középpontosan szimmetrikusak, azaz ugyanolyan érték tartozik a  $(\varepsilon_n, \chi_n)$  ponthoz, mint a  $(-\varepsilon_n, -\chi_n)$  ponthoz. Egy ilyen változtatás tulajdonképpen egy  $\pi/2$  szögű fázist jelentene.

nullák, bár lényegesen kisebbek, mint a jellemző járulékok. Fontos megkülönböztetni a második és harmadrendben kapott amplitúdókat, ugyanis  $R_{i,2,6}^2 \neq R_{i,3,6}^2$ .

Az ?? ábráról az is látszik, hogy mindkét paraméter befolyásolja az azimutfüggő HBT sugarakat, vagyis térbeli és impulzustérbeli aszimmetria is okozhatja az oszcillációkat. Az aszimmetriaparamétereknek ugyanezt az összefonódását tapasztaltuk a folyási koefficiensek esetén is. Csupán az azimutfüggő HBT sugarakat mérve tehát nem tudjuk meghatározni, hogy az aszimmetria melyik típusát látjuk. Ez az összefonódás jól látható a 21. ábrán. Bár az 21. ábra jobb paneljén megfigyelhető, hogy az  $R_{side,3,3}/R_{side,3,0}$  erősebben függ a térbeli aszimmetriától, azaz az  $\varepsilon_3$ -tól, így annak meghatározására közelítőleg alkalmas lehet, ugyanakkor a hullámszerű változása, mint a  $\chi_3$  függvénye ezt a közelítést korlátozza. A paraméterek pontos értékeinek meghatározása csupán ezekből az amplitúdókból tehát nem lehetséges.



22. ábra. Az aszimmetriaparaméterek lehetséges meghatározási módja az azimutális HBT sugarak és a megfelelő rendű folyások együttes mérése.

#### 5.4.4. Az aszimmetriaparaméterek meghatározásának egy lehetséges módja

Az előző két alfejezetben az ellipszoidális illetve trianguláris aszimmetria által okozott  $v_2(p_T)$  elliptikus,  $v_3(p_T)$  trianguláris folyásra és azimutfüggő HBT sugarakra vonatkozó eredményeket mutattam be. A 15. és a 21. ábrák alapján világossá vált, hogy csak az egyik vagy másik mennyiség kísérleti meghatározásával legfeljebb közelítő becslés adható az aszimmetria paraméterek értékeire, mert a mennyiségek értékeit a két mennyiség együttesen határozza meg. A modell alapján azonban javasolhatunk olyan kísérleti eljárást, mely lehetővé teszi az  $n$ -edrendű aszimmetriaparaméterek meghatározását. Ehhez az  $n$ -edrendű azimutális HBT sugarak és a  $v_n$  folyási koefficiens együttes mérésére és illesztésére van szükség. Ha a 21. ábráról az amplitúdókat és a 15. ábráról pedig a  $v_2$  kontúrvonalakat egy ábrán ábrázoljuk láthatjuk, hogy adott  $p_T$  transzverz impulzus esetén a két mért érték egyértelműen meghatározhatja az aszimmetriaparaméterek értékeit, ahogy az a 22. ábrán is látszik. Tegyük fel, hogy a kísérleti adatok szerint  $v_2(p_T = 300 \text{ MeV}/c) = v^*$  és  $R_{\text{side},2}(p_T = 300 \text{ MeV}/c) = R^*$  konstans értékek. A két mérési eredmény birtokában megkereshetjük, hogy a  $v^*$  és az  $R^*$  értékeknek megfelelő kontúrvonalak hol metszik egymást. E metszésponthoz tartozó  $(\varepsilon_2, \chi_2)$  koordináták az aszimmetriaparaméterek modellillesztéssel kapott értékei. Tehát az azimutális HBT és folyási koefficiens kontúrok egyfajta „koordinátarendszerként” foghatók fel, ahol az egyik tengelyen a térbeli, a másik tengelyen a sebességtérbeli aszimmetria van. Az aszimmetria paraméterek tehát a folyási koefficiens és az azimutális HBT együttes illesztésével kapható meg.

### 5.5. Az általánosított Buda–Lund-modell és az önhasonló megoldások

Egy hidrodinamikai parametrizáció segíthet hidrodinamikai megoldások alakjának megsejtésében. Egy önhasonló hidrodinamikai megoldás skálaparaméterére és sebességmezejére ugyanis fennáll az

$$u^\mu \partial_\mu s = 0 \quad (166)$$

egyenlet, vagyis a skálaparaméter együttmozgó deriváltja nulla kell, hogy legyen. Ugyanez a gondolatmenet visszafelé nem igaz: ha egy  $s$  és  $u^\mu$  kielégíti a fenti egyenletet, nem biztos, hogy egy megoldáshoz tartoznak. Láthattuk azonban, hogy hidrodinamikai modellekből meg lehetett sejtteni egy megoldás alakját, ha a modell sebességmezeje és skálaváltozója kielégíti a fenti egyenletet [37, 39]. Ez elegendő motiváció arra, hogy megvizsgáljuk az egyenletet az általánosított modell esetén is.

Helyettesítsük tehát az általánosított  $s$  és  $\Phi$  alakját a (166) egyenletbe feltéve, hogy az  $\alpha_n$  fázis mindenhol nulla. Ha általánosságban vizsgálánánk az egyenletet, és nem tekintenénk el a fázistól, a formulák bonyolultsága miatt nem jutnánk konkrét eredményre, így a számolások egyszerűsítése érdekében érdemes ezzel a választással élni. A sebességmező definíciója tehát a

$$\Phi = \frac{H}{2} r^2 \left( 1 + \sum_{n=2}^N \chi_n \cos(n\varphi) \right) + \frac{H_z}{2} r_z^2 \quad (167)$$

potenciállal az

$$u^\mu = \gamma(1, \partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi) \quad (168)$$

alakban adható meg. A deriváltakat kiszámítva adódnak a sebességmező komponensei, melyek a következők:

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi &= Hr \left[ \cos(\varphi) + \sum_n \chi_n \left( \cos(n\varphi) \cos \varphi + \frac{n}{2} \sin(n\varphi) \sin \varphi \right) \right] \\ \partial_y \Phi &= Hr \left[ \sin(\varphi) + \sum_n \chi_n \left( \cos(n\varphi) \sin \varphi - \frac{n}{2} \sin(n\varphi) \cos \varphi \right) \right] \\ \partial_z \Phi &= H_z r_z. \end{aligned} \quad (169)$$

Lássuk a térbeli aszimmetria leírására bevezetett skálaparamétert! Ezt az

$$s = \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \sum_{n=2}^N \epsilon_n \cos(n\varphi) \right) + \frac{r_z^2}{R_z^2} \quad (170)$$

általános alakban írtuk fel. Ennek deriváltjait is kiszámítjuk, hogy a (166) egyenletet megvizsgálhassuk:

$$\begin{aligned}
\partial_0 s &= -2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \sum_n (\epsilon_n \cos(n\varphi)) \right) + \frac{r^2}{R^2} \sum_n (\dot{\epsilon}_n \cos(n\varphi)) - 2 \frac{\dot{R}_z}{R_z} \frac{r_z^2}{R_z^2} \\
\partial_x s &= \frac{2r}{R^2} \left[ \cos(\varphi) + \sum_n \epsilon_n \left( \cos(n\varphi) \cos \varphi + \frac{n}{2} \sin(n\varphi) \sin \varphi \right) \right] \\
\partial_y s &= \frac{2r}{R^2} \left[ \sin(\varphi) + \sum_n \epsilon_n \left( \cos(n\varphi) \sin \varphi - \frac{n}{2} \sin(n\varphi) \cos \varphi \right) \right] \\
\partial_z s &= \frac{2r_z}{R_z^2}.
\end{aligned} \tag{171}$$

Bevezethetjük a következő függvényeket a jelölések egyszerűsítésére:

$$\begin{aligned}
F_+^n(\phi) &= \cos(n\varphi) \cos \phi + \frac{n}{2} \sin(n\varphi) \sin \varphi \\
F_-^n(\phi) &= \cos(n\varphi) \sin \phi - \frac{n}{2} \sin(n\varphi) \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{172}$$

Ezen függvények segítségével a deriváltak kifejezései a következő alakokra egyszerűsödnek :

$$\begin{aligned}
\partial_x \Phi &= Hr \left( \cos \varphi + \sum_n \chi_n F_+^n(\varphi) \right) & \partial_y \Phi &= Hr \left( \sin \varphi + \sum_n \chi_n F_-^n(\varphi) \right) \\
\partial_x s &= \frac{2r}{R^2} \left( \cos \varphi + \sum_n \epsilon_n F_+^n(\varphi) \right) & \partial_y s &= \frac{2r}{R^2} \left( \sin \varphi + \sum_n \epsilon_n F_-^n(\varphi) \right).
\end{aligned} \tag{173}$$

A  $t$  és a  $z$  komponensben nem vezettünk be speciális jelölést, ezért nem írtuk le még egyszer azokat. Tagonként kiírva a (166) egyenletet

$$u_0 \partial_0 s = -u_x \partial_x s - u_y \partial_y s - u_z \partial_z s \tag{174}$$

alakot kapjuk, amibe behelyettesítve a deriváltakat, a következő kifejezések adódnak:

$$\begin{aligned}
u_0 \partial_0 s &= -2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{r^2}{R^2} \left( 1 + \sum_n (\epsilon_n \cos(n\varphi)) \right) + \frac{r^2}{R^2} \sum_n (\dot{\epsilon}_n \cos(n\varphi)) - 2 \frac{\dot{R}_z}{R_z} \frac{r_z^2}{R_z^2} \\
u_x \partial_x s &= \frac{2Hr^2}{R^2} \left( \cos^2 \varphi + \sum_n [(\epsilon + \chi_n) F_+^n(\varphi) \cos \varphi] + \sum_{n,m} [\epsilon_n \chi_m F_+^n(\varphi) F_+^m(\varphi)] \right) \\
u_y \partial_y s &= \frac{2Hr^2}{R^2} \left( \sin^2 \varphi + \sum_n [(\epsilon + \chi_n) F_-^n(\varphi) \sin \varphi] + \sum_{n,m} [\epsilon_n \chi_m F_-^n(\varphi) F_-^m(\varphi)] \right) \\
u_z \partial_z s &= \frac{2H_z r_z^2}{R_z^2}.
\end{aligned} \tag{175}$$

Ismerve a  $H_z = \frac{\dot{R}_z}{R_z}$  egyenlőséget látható, hogy  $z$  komponens kiegyeszerősödik az időderivált utolsó tagjával. A többi komponenst tovább kell vizsgálni. A (174) egyenlet szerepelő  $-(x\partial_x s + y\partial_y s)$  két tagban az  $F_{\pm}^n$  függvények kombinációi egyszerűbb alakra írhatók. Egyrészt

$$F_+^n(\varphi) \cos \varphi + F_-^n(\varphi) \sin \varphi = \cos(n\varphi) \quad (176)$$

alakra egyszerűsödik. Másrészt az utolsó tagok az  $F_{\pm}^n$  függvények szorzatát tartalmazzák, így bonyolultabb kifejezésre jutunk:

$$\begin{aligned} F_+^n(\varphi)F_+^m(\varphi) + F_-^n(\varphi)F_-^m(\varphi) &= \frac{1}{2} \left( \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) + \frac{nm}{4} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{nm}{4}\right) \cos((n+m)\varphi) + \left(1 + \frac{nm}{4}\right) \cos((n-m)\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (177)$$

Felhasználva ezeket az összefüggéseket, az idő szerinti deriválttal együtt visszaírva a (166) kifejtett alakjába a (174) egyenletbe, a következő kifejezésre jutunk:

$$\begin{aligned} -2 \left( \frac{\dot{R}}{R} - H \right) \left( 1 + \sum_n \varepsilon_n \cos(n\varphi) \right) + \sum_n \dot{\varepsilon}_n \cos(n\varphi) &= -2H \sum_n \chi_n \cos(n\varphi) - \\ &- H \sum_{n,m} \varepsilon_n \chi_m \left[ \left(1 - \frac{nm}{4}\right) \cos((n+m)\varphi) + \left(1 + \frac{nm}{4}\right) \cos((n-m)\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (178)$$

Látható, hogy a kapott kifejezésben a koszinusz függvény különböző argumentumokkal szerepel, így nem tudunk vele egyszerűsíteni. Azonban ha kihasználjuk, hogy bármely  $\cos(k\varphi)$  függvények lineárisan függetlenek különböző  $k$ -k esetén, az  $n, m$  indexekre adhatunk feltételeket, amelyek esetén már ki tudjuk ejteni a koszinusz függvényeket! Ha kikötjük, hogy  $n \geq 2$ , akkor a következő három indexhalmazt kell figyelembe venni:

$$n = 2, \dots, k-2; m = k-n \quad (179)$$

$$n = k+2, \dots, \infty; m = n-k \quad (180)$$

$$n = 2, \dots, \infty; m = n+k. \quad (181)$$

Az első két indexhalmaz összevonható egy kifejezéssé:

$$n = 2, \dots, k-2, k+2, \dots, \infty; m = n-k \quad (182)$$

$$n = 2, \dots, \infty; m = n+k. \quad (183)$$

Így már meg tudjuk fogalmazni a (178) egyenletbeli feltételt a paraméterek segítségével:

$$2 \left( \frac{\dot{R}}{R} - H \right) \epsilon_k - \dot{\epsilon}_k = 2H\chi_k + H \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n \chi_{n+k} \left( 1 + \frac{n(n+k)}{4} \right) + H \sum_{\substack{n=2 \\ n \neq k}}^{\infty} \epsilon_n \chi_{|n-k|} \left( 1 + \frac{n(n-k)}{4} \right). \quad (184)$$

Ha ez az egyenlet teljesül, akkor az eredeti a (166) egyenlet is, azaz a sebességtér és a skálaparaméter lehetnek egy hidrodinamikai megoldás részei. Ez az egyenlet szukcesszíven megoldható, ha adott valamilyen  $\varepsilon_n$  és  $\chi_n$  nem-nulla értékalmaz, de egyszerűsíthetjük az alakját, ha csak első rendben számolunk, azaz  $\mathcal{O}(\chi_n)$  és  $\mathcal{O}(\varepsilon_n)$ . Ekkor ugyanis a (184) egyenletből adódik, hogy:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \quad \text{és} \quad \dot{\varepsilon}_n = -2H\chi_n. \quad (185)$$

Ez azt jelenti, hogy első rendben a térbeli aszimmetria és a sebességtérbeli aszimmetria szétcsatolódik, a térbeli aszimmetria időfejlődését csak a sebességtérbeli aszimmetria határozza meg. Egy másik speciális esetként vizsgáljuk meg az ellipszoidális modellt. Ekkor  $k = 0$  vagyis csak az  $\varepsilon$  és  $\chi_2$  paraméterek nem nullák. Ha megengedünk nemlineáris tagokat is, akkor (178) vagy (184) egyenletből

$$\frac{\dot{R}}{R} = H(1 + \varepsilon_2\chi_2) \quad (186)$$

következik. Felhasználva  $R, H, \varepsilon_2, \chi_2$  Hubble-esetbeli alakjait, hosszadalmas számolások után azonosságra jutunk, vagyis az ellipszoidális modell teljesíti a (166) feltételt.

Egy olyan hidrodinamikai megoldásnak tehát, amely egy ellipszoidálisan vagy magasabb rendű aszimmetriát mutató, anizotrop módon, az adott irányba Hubble-típusú sebességmezővel rendelkező rendszert ír le a (185) és a (186) egyenleteket ki kell elégítenie. A skálaparaméter bevezetésénél láttuk, hogy ez nem elegendő, de szükséges feltétel.

## 5.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben bemutattam a Buda–Lund-modell legkorábbi, nem-relativisztikus verzióját, amely gömbszimmetrikus forrást feltételez, majd tárgyaltam az ellipszoidális, relativisztikus forrást leíró alakját is. Megmutattam, hogy a modell tetszőleges aszimmetria leírására alkalmassá tehető, mind a skálaparaméter, mind a sebességmező általánosítható. Az általánosított modell részletes elemzésével kimutattam, hogy a kétféle aszimmetria összefonódik, csupán az egyiknek megfelelő megfigyelhető mennyiséget mérve nem tudunk következtetéseket levonni. Bemutattam, hogy az azimut HBT sugarak oszcillációit és a folyási koefficienseket egyszerre mérve, illetve illesztve az aszimmetriaparaméterek meghatározhatóak. A skálaváltozó együttmozgó deriváltjának eltűnése feltételből kapcsolatot teremtettem az aszimmetriaparaméterek között, mely kapcsolat az általános szimmetriákat leíró hidrodinamikai megoldások megtalálásában játszhat szerepet.

## 6. A Coulomb-kölcsönhatás Bose–Einstein-korrelációkban

A kétrészecske Bose–Einstein-korrelációs függvényeket általában töltött részecskék esetén szokták vizsgálni. Ennek oka, hogy töltött részecskéket sokkal könnyebb detektálni, mint semleges részecskéket, melyeket sokszor a bomlásaikon keresztül figyelnek meg. A töltött részecskék azonban nyomot hagynak a legtöbb detektortípusban. Természetesen a részecskeazonosítás cseppet sem könnyű feladat; erről a 7. fejezetben lesz szó.

Technikailag ugyan könnyebb töltött részecskéket detektálni, azonban az, hogy töltöttek egy másik problémát vet fel. Figyelembe kell venni azt, hogy közöttük fellép a Coulomb-kölcsönhatás<sup>10</sup>, amelynek kezelése matematikailag bonyolult feladatot jelent, azonban több módszer is a rendelkezésünkre áll. Ebben a fejezetben ezeket a módszereket mutatom be.

### 6.1. Coulomb-kölcsönhatással korrigált korrelációs függvény

A 4.1. szakaszban bemutattam, hogy, ha eltekintünk a végállapoti kölcsönhatásoktól, és a  $\Psi_q^{(2)}$  hullámfüggvény előállítható síkhullámokból, akkor a kétrészecske korrelációs függvényt

$$C_2^{(0)}(\mathbf{q}, \mathbf{K}) \approx 1 + \lambda \left| \frac{\tilde{S}(\mathbf{q}, \mathbf{K})}{\tilde{S}(0, \mathbf{K})} \right|^2 \quad (187)$$

integrál definiálja, ahol  $S(\mathbf{r}, \mathbf{K})$  a forrásfüggvény,  $\tilde{\cdot}$  pedig a Fourier-transzformációt jelöli. A végállapotbeli Coulomb-kölcsönhatás, azaz Coulomb-taszítás a kirepülő párokat alkotó részecskék között lép fel, s így a kétrészecske hullámfüggvény nem közelíthető síkhullámokkal. Ekkor a kétrészecske Coulomb-probléma Schrödinger-egyenletének megoldását kell hullámfüggvényként használni, ami ismert [110] a pár nyugalmi rendszerében (PCMS-ben). Ebben a rendszerben a hullámfüggvény alakja

$$\Psi_{\mathbf{q}}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(1 + i\eta)}{e^{\pi\eta/2}} \left\{ e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} F(-i\eta, 1, i(qr - \mathbf{q}\mathbf{r})) + [\mathbf{r} \leftrightarrow -\mathbf{r}] \right\}, \quad (188)$$

ahol  $F(\cdot, \cdot, \cdot)$  a konfluens hipergeometrikus függvény,  $\Gamma(\cdot)$  a Gamma-függvény,  $\eta = \alpha_{\text{EM}} m_\pi / q$  a Sommerfeld-paraméter, amelyben  $\alpha_{\text{EM}} \approx 1/137$  a finomszerkezeti állandó<sup>11</sup> és  $m_\pi$  a pion tömeg. Ha a korábban bevezetett  $\lambda$  paramétert a Bowler–Sinyukov-módszer segítségével [111, 112] vesszük figyelembe, a Coulomb-korrigált kétrészecske korrelációs függvény a

$$C_2(\mathbf{q}, \mathbf{K}) = 1 - \lambda + \lambda \int D(\mathbf{r}, \mathbf{K}) |\Psi_{\mathbf{q}}^{(2)}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \quad (189)$$

alakban írható fel, ahol  $\Psi_{\mathbf{q}}^{(2)}$  a (188) egyenletben definiált Coulomb-kölcsönható hullámfüggvény,  $D(\mathbf{r}, \mathbf{K})$  pedig a (95) egyenletben definiált páreloszlásfüggvény. Ha kölcsönhatásmentes esetet

<sup>10</sup>Felléphet az erős kölcsönhatás is, melyet ebben a tárgyalásban elhanyagolok. A végállapoti erős kölcsönhatást például a [109] cikkben vizsgálták.

<sup>11</sup>Az  $\alpha_{\text{EM}}$  a finomszerkezeti állandót, míg az index nélküli  $\alpha$  a Lévy-exponenst jelöli.



tekintünk, azaz a pár hullámfüggvénye felépíthető síkhullámokból, akkor visszkapjuk a (96) egyenletet.

Példaként tekintsük a Gamow-korrekciót, mely pontszerű forrást feltételez:  $S(r) = \delta(r)$ . Ekkor az integrálást elvégezve a jól ismert

$$K(q) = \text{Gamow}(\eta) = \frac{C_2(q)}{C_2^{(0)}(q)} = \int |\Psi_{\mathbf{q}}^{(2)}(0)| = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad (190)$$

formula adódik. Ha a forrás nem pontszerű, hanem kiterjedt, akkor az integrál csak speciális esetekben végezhető el [113], de általában nem; numerikus módszereket kell alkalmaznunk, hogy a kísérleti adatanalízisben figyelembe tudjuk venni a hatást.

## 6.2. Illesztés numerikus táblázattal

Lévy-alakú forrásra a (189) egyenletbeli integrál eredményének analitikus alakja nem fejezhető ki ismert függvényekkel. Azonban alkalmazhatunk numerikus módszert is. Mivel a numerikus számolás időigényes, praktikus egy táblázatba tölteni a különböző  $Q$ ,  $R$  és  $\alpha$  értékek mellett kapott eredményeket, ahogy azt pl. a [60] cikkben is szerepel. Így az illesztés során a Coulomb-korrigált korrelációs függvényt a táblázatból olvassuk ki. Mivel a táblázatot nem tudjuk végtelen pontos értékekkel folytonosan feltölteni, a tárolt értékek között interpolációra van szükség, ami numerikus fluktuációkhoz vezethet. Ezek hamis lokális minimumokat eredményeznek a  $\chi^2$  térképeken, s félrevezethetik a  $\chi^2$ -et minimalizáló algoritmust. Azonban iteratív illesztési eljárás alkalmazásával ez a probléma kiküszöbölhető. Felhasználva a Coulomb-korrekció  $K(\lambda_0, R_0, \alpha_0; Q) = \frac{C_2(\lambda_0, R_0, \alpha_0; Q)}{C_2^{(0)}(\lambda_0, R_0, \alpha_0; Q)}$  a (189) egyenletbeli alakját, az iteratív eljárást a következő lépésekben adhatjuk meg:

1. Illesszük az adatokat a (189) egyenletben definiált függvénnyel, ahol a forrásfüggvényt Lévy alakúnak tesszük fel  $\Rightarrow \lambda_0, R_0, \alpha_0$
2. Illesszünk a  $C_2^{(0)}(\lambda, R, \alpha; Q)K(\lambda_0, R_0, \alpha_0; Q)$  függvénnyel, mely a paraméterfüggésnek csak az analitikus részét tartalmazza  $\Rightarrow \lambda_1, R_1, \alpha_1$
3. Addig tartson az iteráció, amíg  $\lambda_{n+1}, R_{n+1}, \alpha_{n+1}$  és  $\lambda_n, R_n, \alpha_n$  kevesebb, mint 1%-ban tér el egymástól.

Ezzel az iteratív eljárással a  $\lambda(K), R(K), \alpha(K)$  paraméterek meghatározhatóak [60]. A későbbiekben tárgyalt kísérleti analízisben is ezt a módszert használtam [114].

## 6.3. Parametrizált Coulomb-korrekció

A numerikus táblázat használatára azért van szükség, mert a Coulomb-korrekció nem ismert zárt, analitikus alakban, azonban numerikus fluktuációk léphetnek fel annak véges felbontása miatt, s így iteratív illesztési eljárást kell követnünk. Ugyan ez megoldja a problémát,

de lassúvá teszi az illesztéseket. Azonban nem szükséges a táblázat használata, sem az analitikus megoldás ismerete, ha találunk egy olyan parametrizációt, ami kellő pontossággal leírja a Coulomb-korrigált korrelációs függvényt. A parametrizációhoz szükségünk van egy, a fentihez hasonló numerikus táblázatra.

Ilyen parametrizációt Siklér Ferenc közelítő számításokkal az  $\alpha = 1$  Cauchy-esetre talált [93], melyet a következő alakban írhatunk fel:

$$\frac{K(q; \alpha = 1, R)}{\text{Gamow}(q)} = K_{\text{Cauchy}}(R, q) = \left( 1 + \frac{\frac{\alpha_{\text{EM}} \pi m_{\pi} \frac{qR}{\hbar c}}{q}}{k + \frac{qR}{\hbar c}} \right). \quad (191)$$

E függvény egy paramétert tartalmaz, melynek értéke  $k = 1,26$ , azonban csak  $\alpha \approx 1$  tartományban írja le az effektust. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az  $\alpha$  ettől az értéktől lényegesen eltérhet. Hogyha Lévy-forrásra szeretnénk parametrizációt kapni, akkor be kell vezetnünk az  $\alpha$ -függést. Ezt érdemes úgy megtenni, hogy az  $\alpha = 1$  határesetben visszacapjuk a (191) egyenlettel definiált korrekciót. Ezt a [115, 116] cikkekben az  $R \rightarrow \frac{R}{\alpha}$  módon vezettük be. A kellően pontos parametrizációhoz magasabb rendű tagok bevezetése is szükséges. Így a

$$\frac{K(q; \alpha, R)}{\text{Gamow}(q)} = K_{\text{mod}}(q; \alpha, R) = 1 + \frac{A \frac{\alpha_{\text{EM}} \pi m_{\pi} R}{\alpha \hbar c}}{1 + B \frac{qR}{\alpha \hbar c} + C \left( \frac{qR}{\alpha \hbar c} \right)^2 + D \left( \frac{qR}{\alpha \hbar c} \right)^4} \quad (192)$$

alakra juthatunk, ahol  $A, B, C, D$   $\alpha$  és  $R$  függvényei. Ez a formula visszaadja a (191) korrekciót, ha  $\alpha = 1$  és  $C = D = 0$ , valamint követni tudja a numerikusan számolt  $\alpha$  függést, amint a 23. ábrán is látszik.

A formula tulajdonképpen a numerikus táblázat egy interpolációja az ábrán látható 5-200 MeV impulzuskülönbség tartományon. A következő lépés az  $A, B, C, D$  függvények parametrizációja. A következő alakot határoztuk meg:

$$A(\alpha, R) = (a_A \alpha + a_B)^2 + (a_C R + a_D)^2 + a_E (\alpha R + 1)^2 \quad (193)$$

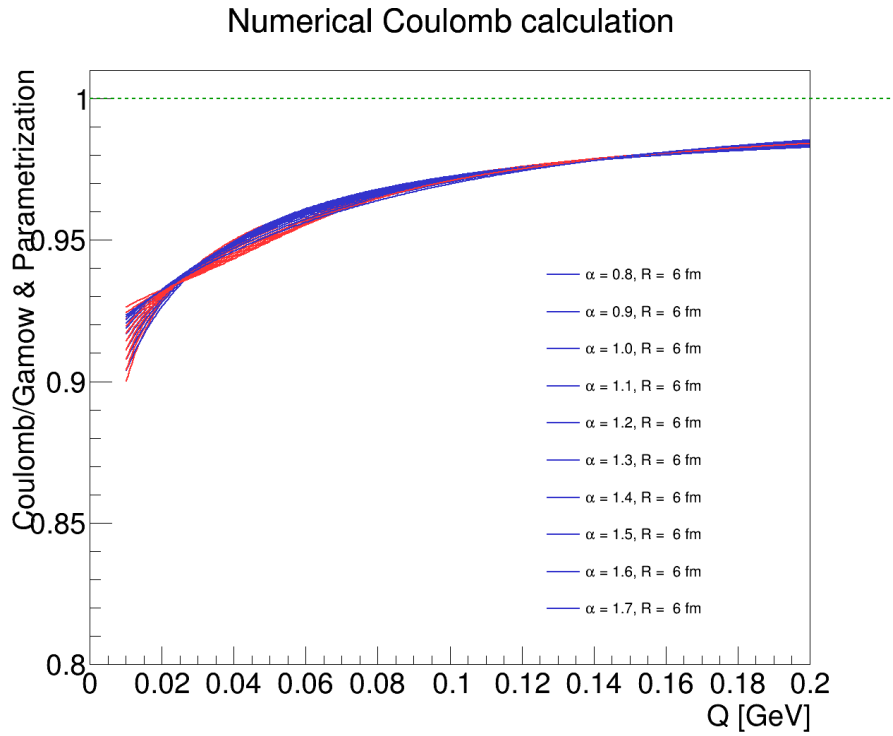
$$B(\alpha, R) = \frac{1 + b_A R^{b_B} - \alpha^{b_C}}{\alpha^2 R (\alpha^{b_D} + b_E R^{b_F})} \quad (194)$$

$$C(\alpha, R) = \frac{c_A + \alpha^{c_B} + c_C R^{c_D}}{c_E \left( \frac{\alpha}{R} \right)^{c_F}} \quad (195)$$

$$D(\alpha, R) = d_A + \frac{R^{d_B} + d_C \alpha^{d_F}}{R^{d_D} \alpha^{d_E}}. \quad (196)$$

A különböző paraméterek értékei a 2. táblázatban láthatóak<sup>12</sup>. A (192) parametrizáció tehát ezekkel a paraméterekkel jó közelítéssel visszaadja a Coulomb-korrekció numerikus táblázatba

<sup>12</sup>A két hivatkozott cikkben [115, 116] eltérő paraméterértékek vannak. Ennek oka, hogy utóbbi nagyobb  $R$  és  $\alpha$  tartományt fed le, s a 9. fejezetben bemutatott előzetes eredmények is ezzel a parametrizációval készültek. Ezért ebben a dolgozatban a nagyobb tartományra érvényes parametrizáció eredményeit közlöm.



23. ábra. Példa a Coulomb-korrekció parametrizációjára egy  $R$  és különböző  $\alpha$  értékek mellett. Megfigyelhető, hogy a gyenge  $\alpha$ -függés nem elhanyagolható.

$a_A = 0,26984$	$a_B = -0,49123$	$a_C = 0,03523$	$a_D = -1,31628$	$a_E = 0,00359$	
$b_A = 2,37267$	$b_B = 0,58631$	$b_C = 2,24867$	$b_D = -1,43278$	$b_E = -0,05216$	$b_F = 0,72943$
$c_A = -4,30347$	$c_B = 0,00001$	$c_C = 3,30346$	$c_D = 0,000001$	$c_E = 0,000003$	$c_F = 1,68883$
$d_A = 0,00057$	$d_B = -0,80527$	$d_C = -0,19261$	$d_D = 2,77504$	$d_E = 2,02951$	$d_F = 1,07906$

2. táblázat. Az  $A, B, C, D$  függvények paramétereinek értékei.

---



---

$A_a = 0,12625$	$A_b = 0,05385$	$A_c = -0,00913$	$A_d = -0,01846$	$A_e = 0,00085$	$A_f = 0,000417,$
$B_a = 19,31620$	$B_b = 5,58961$	$B_c = 2,26264$	$B_d = -1,28486$	$B_e = -0,08216$	$B_f = 0,023845.$

---



---

3. táblázat. A (197) egyenletben definiált, az aszimptotikus korrekciót leíró függvény együtt-hatóinak paraméterei.

töltött értékeit. A közelítés jóságáról a későbbiekben ejtünk szót. Mivel ez a formula egy interpoláció, s csak az  $Q = 5 - 200$  MeV-es tartományon érvényes, külön figyelni kell a nagy  $Q$ -s viselkedésre. Tudjuk, hogy a Coulomb-kölcsönhatás nagy impulzuskülönbségre 1-hez tart, így olyan simító függvényt választunk, mellyel megszorozva a parametrizációt, a kapott függvény teljesíti ezt a feltételt. A választott exponenciális aszimptotikus korrekció alakja

$$E(q; A, B) = 1 + Ae^{-Bq} \quad (197)$$

ahol  $A(\alpha, R)$  és  $B(\alpha, R)$  együtt-ható függvények alakjait könnyen parametrizálhatjuk a

$$\begin{aligned} A(\alpha, R) &= A_a + A_b\alpha + A_cR + A_d\alpha R + A_eR^2 + A_f(\alpha R)^2 \\ B(\alpha, R) &= B_a + B_b\alpha + B_cR + B_d\alpha R + B_eR^2 + B_f(\alpha R)^2 \end{aligned} \quad (198)$$

függvényekkel, ahol az együtt-hatók értékeit a 3. táblázat tartalmazza. (ld. 12. lábjegyzetbeli megjegyzést!)

Az aszimptotikus viselkedés mellett fontos még foglalkozni azzal, hogy az interpoláció végén ne legyen hirtelen változás, törés a függvényben. Ezt egy hatványfüggvény alakú taggal kezelhetjük:

$$F(q; q_0, D_q) = \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{q_0}\right)^n} \quad (199)$$

ahol  $q_0 = 0.07$  GeV/c és  $n = 20$ .

Felhasználva tehát a parametrizációt, a simító és levágó függvényeket, a Coulomb-korrekció parametrikusan a

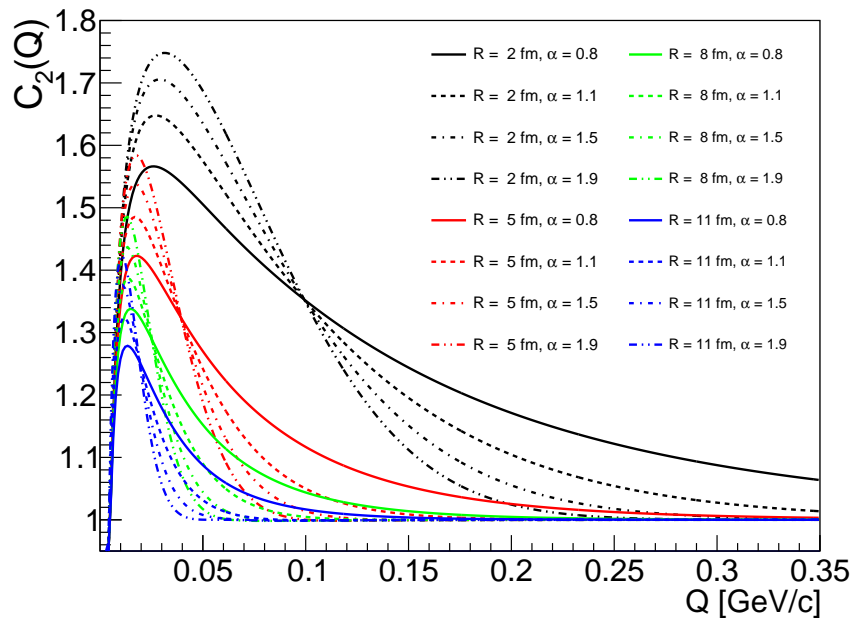
$$K(q; \alpha, R) = (1 - F(q)) \cdot E(q) + F(q)\text{Gamow}(q)K_{\text{mod}}(q; \alpha, R) \quad (200)$$

alakban írható, mellyel a Coulomb-korrigált korrelációs függvény a

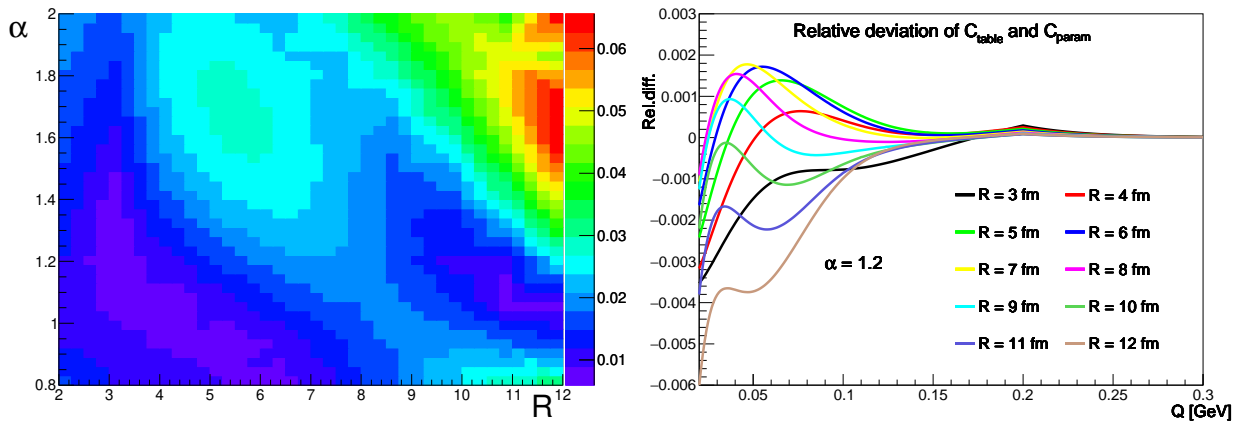
$$C_2(q; \alpha, R) = [1 - \lambda + K(q; \alpha, R)\lambda(1 + \exp[|qR|^\alpha])] \cdot (\text{feltételezett háttér}). \quad (201)$$

kifejezéssel írható fel a Bowler–Sinyukov-eljárásnak megfelelően. A parametrizációval kapható korrelációs függvényekre néhány paraméterérték esetén látható példa a 24. ábrán.

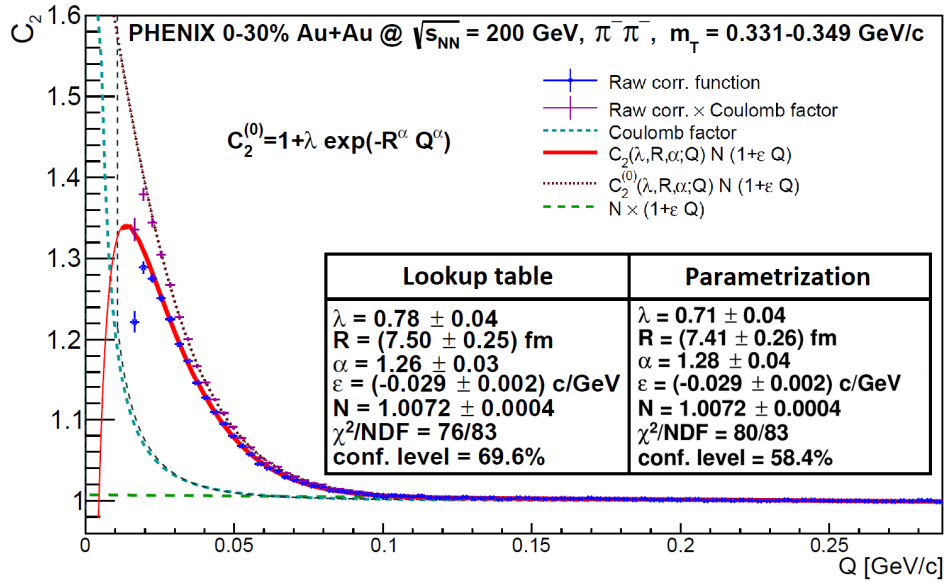
A parametrizáció jóságát a táblázattól való relatív eltérésével jellemeztem. Ezt láthatjuk a különböző  $\alpha$  és  $R$  értékekre a 25. ábrán balra. A parametrizáció maximális eltérése  $Q$ -ra



24. ábra. A parametrizációval kapható Coulomb-korrigált korrelációs függvény néhány  $\alpha$  és  $R$  érték mellett.



25. ábra. A parametrizáció  $Q$  átlagolt relatív eltérése a táblázattól %-ban kifejezve különböző  $\alpha$  és  $R$  értékekre (balra). Az átlagolás a  $0.01 < Q < 0.1$  GeV/c tartományon történt. A parametrizáció relatív eltérése a táblázattól %-ban kifejezve  $\alpha = 1,2$  esetén különböző  $R$  értékekre (jobbra).



26. ábra. A PHENIX eredményeinek reprodukálása a parametrizációval. A Look-up table oszlopban láthatóak a korábbi illesztés paraméterértékei és a parametrizációval kapott értékek a Parametrization oszlopban.

átlagolva 0.07%, amit elfogadhatónak ítélnénk. A két dimenziós ábra  $5 \text{ MeV/c} \leq Q \leq 200 \text{ MeV/c}$  szakaszra átlagolva készült. Egy konkrét  $\alpha$  érték és néhány tipikus  $R$  értékre látható a relatív eltérés a teljes paraméterezett  $Q$  tartományra a 25. ábra jobb oldalán.

A relatív eltérés mellett azt is megvizsgáltam, hogy a parametrizáció reprodukálja-e a már ismert eredményeket. Ez látható a 26. ábrán, ahol a korábbi [60] illesztési paraméterértékeket is feltüntettem. A parametrizációval és a numerikus táblázattal kapott paraméterértékek hibán belül megegyeznek.

A Coulomb-korrekciónak tehát parametrizálható Lévy-típusú forrás esetén, a parametrizáció jól egyezik a numerikus táblázattal. A 8. fejezetben ismertetett centralitásfüggő analízis során és a [114] cikkben az eredményekhez a numerikus táblázatot használtam, a 9. fejezetben közölt új, a publikálásra előkészítő kollaborációs folyamatban lévő eredményeket a parametrizációval kaptam.

## 6.4. Összefoglalás

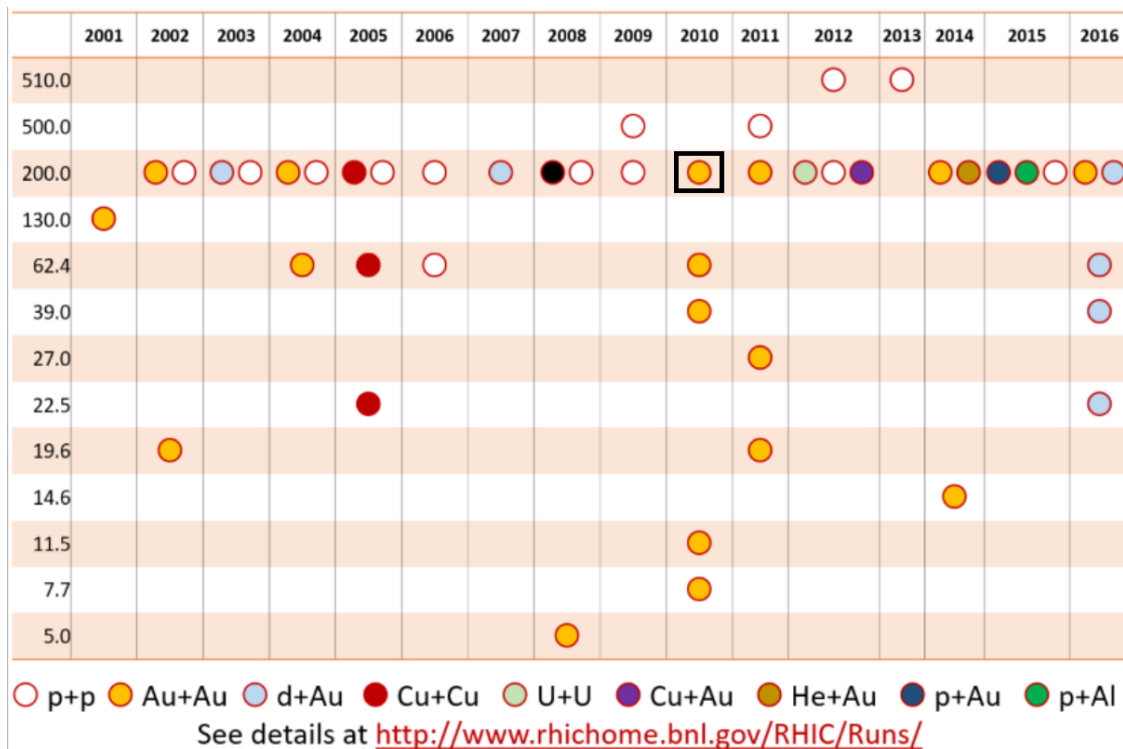
Ebben a fejezetben bemutattam a végállapoti Coulomb-kölcsönhatás szerepét nehézion-ütközésekben. Kezelésére kétféle eljárást tárgyaltam: egy numerikus táblázaton alapulót, melyet iteratív illesztési eljárásban használva lehet az effektust figyelembe venni és egy parametrizációt, mely a táblázaton alapul. A parametrizáció előnye a numerikus táblázattal szemben, hogy zárt alakú, nem okoz numerikus fluktuációkat, így nem szükséges iteratív illesztési eljárásban használni. Elemeztem a parametrizáció és a táblázat közötti eltéréseket és azt kielégítőnek találtam. Az eredményeket több konferencián mutattam be és két cikkben írtuk le [115, 116].

## 7. A Bose–Einstein korrelációs függvények mérése

Ebben a fejezetben röviden bemutatom a PHENIX kísérletet, majd az analízis részleteit. Részletezem, hogy hogy lesz a detektált jelből mért adat, részecskeazonosítással és különböző vágásokkal végül hogy juthatunk el az olyan paraméterekig, amelyeknek fizikai tartalmat tulajdonítunk. A fejezet végén röviden összefoglalom a 0-30%-os centralitás szelekcióval készült eredményeket és érvelek a centralitásfüggő analízis elvégzésének szükségessége mellett.

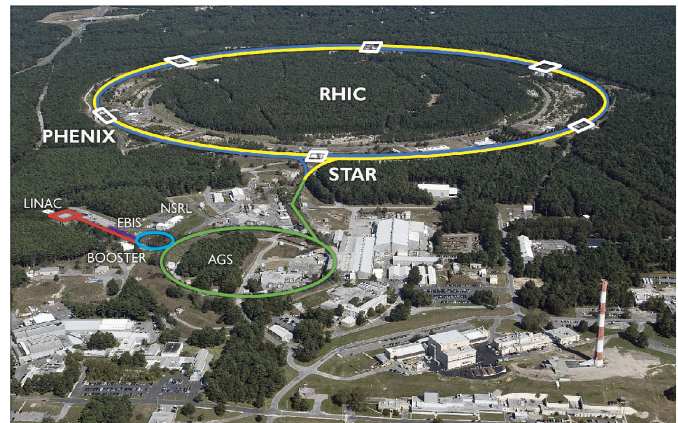
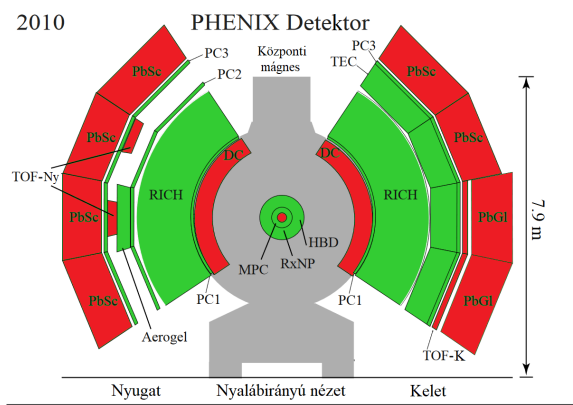
### 7.1. A PHENIX kísérlet

Az Egyesült Államokban, a Brookhaven National Laboratoryban működik a Relativisztikus Nehézion-ütköztető (**R**elativistic **H**eavy **I**on **C**ollider), amely két, nagyjából 1,2 km átmérőjű gyűrűből áll. Ezek hat pontban metszik egymást, melyek közül négybe detektorrendszereket telepítettek: a PHENIX-et, a STAR-t, a BRAHMS-ot és a PHOBOS-t. Utóbbi kettő 2006-ban, a PHENIX pedig 2016-ban fejezte be az adatfelvételt. A PHENIX 2021-22-től az sPHENIX formájában születik majd újjá. A STAR-ban jelenleg is folyik adatfelvétel.



27. ábra. Áttekintő táblázat a 2016-ban megszűnt PHENIX detektornál megfigyelt ütközésekről és energiákról. Az alább ismertetett analízis a 2010-es 200 GeV-es Au+Au adatszettből készült.

A RHIC egyedülállóan sokféle ütköző rendszert vizsgált a proton-proton ütközésektől az urán-urán ütközésekig többféle energián. (Az ebben a dolgozatban bemutatott analízis eredményeihez a 2010-ben felvett arany-arany ütközésekből származó adatokat használtam.)



28. ábra. A RHIC madártávlatból és a PHENIX detektorrendszer vázlatos rajza. Az analízis során a pirossal jelölt detektorokat használtuk nyomkövetésre és részecskeazonosításra.

A PHENIX (**P**ioneering **H**igh Energy Nuclear **I**nteraction **eX**periment) detektorrendszer 2001-ben kezdte meg az adatgyűjtést és 2016-ban fejezte be. Elsődleges célja, a kvark-gluon plazma felfedezése és tanulmányozása mellett a PHENIX alkalmas volt proton-proton ütközésekben létrejövő rendszerek vizsgálatára is, mely a nukleonok spinstruktúrájának megértését teheti lehetővé. 15 évnyi működése alatt sokféle rendszer ütközéséből vettek fel adatokat, melyekről egy összefoglaló táblázat látható a 27. ábrán.

A detektorokat<sup>13</sup> az ütközési pont körül hagymahéj szerkezetben helyezték el. A PHENIX detektorrendszer nem fedi le a teljes térszöveget, mint például a STAR kísérlet, de a detektorainak hely- és időfelbontása pontosabb. A rendszer általános felépítése és a RHIC komplexum látható a 28. ábrán. A detektorrendszer egy részletes leírása a [117] cikkben található. Funkcióik szerint négy fő alrendszerbe sorolhatjuk a detektorokat:

1. Globális detektorok, melyek az eseménykarakterizációt teszik lehetővé. Ilyen detektor például a Beam Beam Counter (BBC) és a nullafoki kaloriméter (ZDC) is, melyekkel a nehézion-ütközésekben a centralitást is meg lehet határozni.
2. A központi kar detektorai, mely energia-, impulzus- és tömegmérésre szolgálnak. A fő részecskeazonosító detektorok, mint például a repülési idő detektorok (ToF), drift kamrák (DC) és elektromágneses kaloriméterek (EMCal) itt vannak.
3. Nyalábirányban elhelyezett detektorok (ún. forward detektorok), melyek elsősorban müonok megfigyelésére szolgálnak.
4. A detektorok mellett az adatkiolvasó rendszer is egy külön alrendszernek tekinthető.

A következőkben röviden áttekintem ezeket; a részletek a [118] kötetben találhatóak.

<sup>13</sup>Nem mindegyik detektor nevének létezik meghonosodott magyar megfelelője, így ahol ilyen nincs, ott az angol elnevezést fogom használni.



### 7.1.1. Globális detektorok

A globális detektorok feladata az eseménykarakterizáció. Az alrendszer három detektorszettet tartalmaz. Az egyik a ZDC [119], amely az előreszórt neutronok energiáját és multiplicitását vizsgálja. Ezen detektorok esemény triggerként is működnek, de a luminozítás monitorozásában, a multiplicitás és az esemény geometriájának meghatározásában is szerepük van.

Egy másik detektorszett a korábban említett Beam-Beam-Counter (BBC). Ezek a detektorok segítenek meghatározni a kezdeti időt a repülési idő detektoroknak (ToF detektorok), valamint az esemény helyét határozzák meg a nyaláb irányban, vagyis a  $z$ -tengely mentén. A hadronok azonosításában elsődleges szerepe van ezen detektoroknak, mivel az azonosításhoz a repülési idő fontos.

### 7.1.2. Központi kar detektorai

A központi spektrométer két pár, 0,8 T erősségű központi mágnessel van ellátva, melyek a nyalábbal párhuzamos teret biztosítanak az ütközési pont körül. A töltött részecskék ebben a térben a Lorentz-törvénynek megfelelően eltérülnek. Az eltérülés mértéke, azaz a pályájuk sugara az impulzusukkal arányos. Ezen kívül nyomkövető detektorok és kaloriméterek vannak a detektorrendszer ezen részében.

Kétféle kalorimétert alkalmaznak a PHENIX-nél: ólom-szcintillátort (PbSc) és ólomüveget (PbGl), melyeket idő- és energiamérésre használnak. A kaloriméterek a rendszer legkülső részébe lettek szerelve.

A nyomkövető rendszer (tracking system) három szett ún. pad chamber (PC) detektort használ, melyek a pontos helyfelbontásért felelősek. A precíz impulzusmérés a drift kamrákkal (DC) lehetséges, míg nyomkövetési és részecskeazonosítási információkhoz juthatunk a TEC (time expansion chamber) segítségével. A ToF és a RICH (ring-imaging cherenkov) detektorok szintén részecskeazonosításra használhatóak.

Az ütközési pont körül van elhelyezve a hadronokra vak detektor (hadron blind detector, HBD), a Müion Piston Kaloriméter (MPC) és a reakciósík pontosabb meghatározására fejlesztett RxNP detektor. A HBD-t azért építették be a PHENIX kísérletbe, hogy a kombinatorikus háttérrel csökkentve pontosabban lehessen az  $e^+e^-$  párokat detektálni. Ilyen párokon keresztül lehetséges  $\gamma$ ,  $\pi^0$  és más semleges részecskék detektálása. Az MPC detektor a nukleonok spinszerkezetének megértését célzó kísérletekben jelentett fejlesztést. A RxNP pasztik szcintillátorokból álló, két korong alakba rendezett detektor, melyben a lapok egymással szemben, a nyalábra merőlegesen lettek elhelyezve. A detektorokban mért részecskeeloszlásból is meg lehet határozni a reakciósíkot.

### 7.1.3. Nyalábirányú müion detektorok

A müion detektor többek között a  $J/\Psi$  részecske di-müion bomlásának megfigyelésében fontos. A proton spinstruktúrájának vizsgálata mellett az sQGP vizsgálatában is szerepet játszik. A mérföldköveknél a 2.3. szakaszban említettem, hogy a plazma hőmérséklete megmérhető különböző részecskék elnyomásával. A  $J/\Psi$  is ilyen, hőmérsékletmérésre alkalmas részecske.

A  $J/\Psi$  egy gyengén kötött  $c\bar{c}$  állapot, melynek egyik felfedezője, S.S.Ting éppen a BNL-ben figyelte meg a részecskét. Ez a részecske egy forró és sűrű közegben nehezebben tud kialakulni, mint egy gázban. Így, ha a nehézion-ütközésekben  $J/\Psi$  elnyomást tapasztalunk, az arra utalhat, hogy létrejött egy sűrű közeg, méghozzá annyira forró, amely elegendő ahhoz, hogy ezt az elnyomást létrehozza.

A müion rendszer nyomkövető (drift kamra) és azonosító detektorok (vas abszorberek és Iarocci-csövek) rendszeréből áll.

## 7.2. Az adatszett és részecskeazonosítás

Ebben a szakaszban a részecskeazonosítás és a korrelációs függvények előállításának folyamatát mutatom be a PHENIX kísérletnél. A fejezet végén bemutatom a 0-30%-os centralitás szelekcióval végzett Lévy-HBT analízis eredményeit. A részecskeazonosítást és néhány szükséges recalibrációt Dr. Nagy Márton végezte. A felhasznált adatokat a RHIC PHENIX rögzítette 2010-ben, arany-arany ütközésekben 200 GeV nukleononkénti ütközési energián.

Az analízis lépéseit röviden a következő pontokban foglalhatjuk össze:

- Részecskeazonosítás, (re)kalibrációk
- Globális, részecskenyom- és párvágások
- A páreloszlások mérése
- A korrelációs függvények előállítása és illesztése
- Az illesztési paraméterek függéseinek meghatározása és értelmezése

Az alábbi alfejezetekben ezeket a pontokat fejtem ki. A következő fejezetben tárgyalt centralitásfüggő analízishez is az ebben a fejezetben leírt adatszettet használtam.

### 7.2.1. Eseménykarakterizáció

Az eseménykarakterizáció a BBC detektorokkal készült. A BBC két, északi és déli karja a PHENIX középpontjától  $\pm 144$  cm-re található a nyaláb mentén és karonként 64 kvarc Cserenkov detektort tartalmaz, melyek végein fotoelektron-sokszorozók vannak. Az ebben a detektorban detektált töltések számából lehet az esemény centralitását meghatározni, a detektálások oldalankénti időkülönbségéből pedig azt, hogy az esemény hol történt a z-tengely, vagyis a nyalábirány mentén.

### 7.2.2. Nyomkövetés

A nyomkövetés a részecskék nyomának meghatározását jelenti. A pontos nyomkövetés természetesen nagyon fontos, mivel a részecskeazonosítás pontossága azon múlik, mennyire jó

minőségűek a részecskenyomok, azaz mennyire bízhatunk meg abban, hogy egy pionnak tulajdonított részecskenyom a valóságban is egy pionhoz tartozott. A kellő pontosságot a detektoroktól függő ún. trigger feltételekkel tudjuk elérni. A detektorok hatásfoka nem 100%, így nem adnak minden alkalommal jelet, amikor áthalad rajtuk egy részecske. Amikor jelzik, hogy a detektor egy bizonyos részében történt beütés, a részecskenyom helyének meghatározása akkor is csak bizonyos pontossággal tehető meg. Ezeket a bizonytalanságokat figyelembe véve megkövetelhetünk olyan feltételeket, amelyek több detektor együttes jelét és hagymahéj szerkezetet használnak fel. Ezek teljesülése esetén elfogadjuk a különböző beütések összességét egy részecskenyomnak. Például, ha a belső nyomkövető detektorokban látjuk egy töltött részecske görbült nyomát (a PHENIX esetén pl. egy driftkamrában) és ismerjük a mágneses teret, akkor társíthatunk ehhez a nyomhoz egy jelet a külső kaloriméterek valamelyikében. Ezt persze bizonyos bizonytalansággal tehetjük csak meg.

Jelen analízisben a PHENIX detektorrendszer két (keleti és nyugati) karjával, az ún. központi karral végezték a nyomkövetést. A részecskenyomok rekonstruálásához három detektor, a drift kamra, a pad kamra és a BBC kombinált jelét használták. A drift kamra nagyjából két méterre helyezkedik el a középponttól és a transzverz síkban 1 mrad pontossággal tudja a részecskenyomokat felbontani. A pad kamra egy sokszálas proporcionális kamra, mely a drift kamra mögött van elhelyezve, s a részecskenyomok pozícióját határozhatjuk meg vele  $z$  és  $\varphi$  változóiban 1,7 mm felbontással. Az e három detektorral meghatározott részecskenyomokat vetítve a külső detektorokba verifikálhatjuk azokat.

### 7.2.3. A részecskeazonosítás

Jelen analízisben a részecskeazonosítást repülési idő méréssel végezték a külső mintavevő kaloriméterekkel és repülési idő detektorokkal. A kaloriméterek időfelbontása 400-600 ps, míg a jobb felbontású repülési idő detektoroké akár 90 ps is lehetett. Ismerve a megtett utat ( $L$ ) és a DC/PC1 által mért impulzust ( $p$ ), az invariáns tömegnégyzet meghatározható:

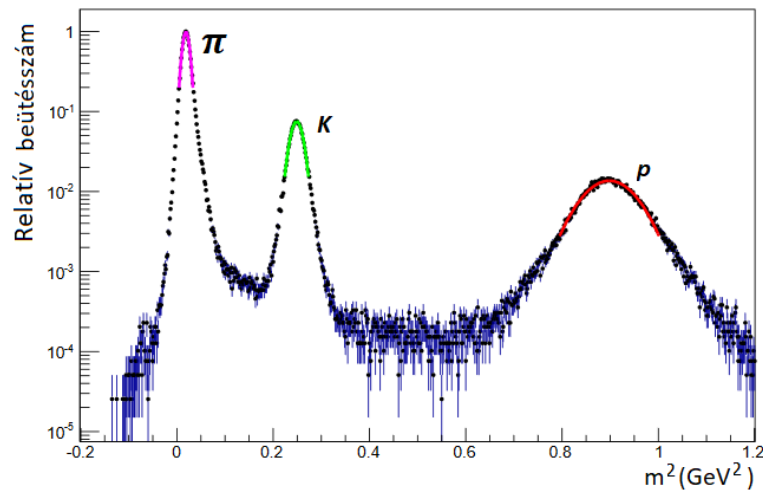
$$m^2 = \frac{p^2}{c^2} \sqrt{\left(\frac{ct}{L}\right)^2 - 1}. \quad (202)$$

Ez alapján a pionok,  $2\sigma$  vágással az  $m^2$  eloszlásban, azonosíthatóak. Erre láthatunk egy példát a 29. ábrán. Egy hasonlóan látványos ábra, ha a beütésszámot az (impulzus  $\times$  töltés) és az  $m^2$  függvényében ábrázoljuk 2D hisztogramon, amire egy példa a 30. ábrán látható.

### 7.2.4. Eseményszelekció

A minimum bias<sup>14</sup> adatszett  $\sim 7,3 \times 10^9$  eseményt tartalmazott, melyből 0-30% centralitás szelekció után  $\sim 2,2 \times 10^9$  esemény maradt. A  $z$ -vertex pozíció  $\pm 30$  cm-re volt szűkítve, hogy a központi mágnes torzító hatásait elkerüljük. A jó minőségű részecskenyomokhoz a következő követelményekre volt szükség: a drift kamra és a pad kamra is adjon jelet, a projektált és az

<sup>14</sup>Minimum bias eseményeknek olyan eseményeket nevezünk, melyek úgy kerültek rögzítésre a detektornál, hogy a lehető legkevesebb triggerfeltételt alkalmazták rájuk.



29. ábra. A (202) egyenletben definiált tömegnégyzet eloszlás látható az ábrán. A csúcsok a jelölt részecskékhez tartoznak. A csúcsokra egy-egy Gauss-t illesztve,  $2\sigma$  vágást alkalmazva, azonosíthatjuk a részecskéket.

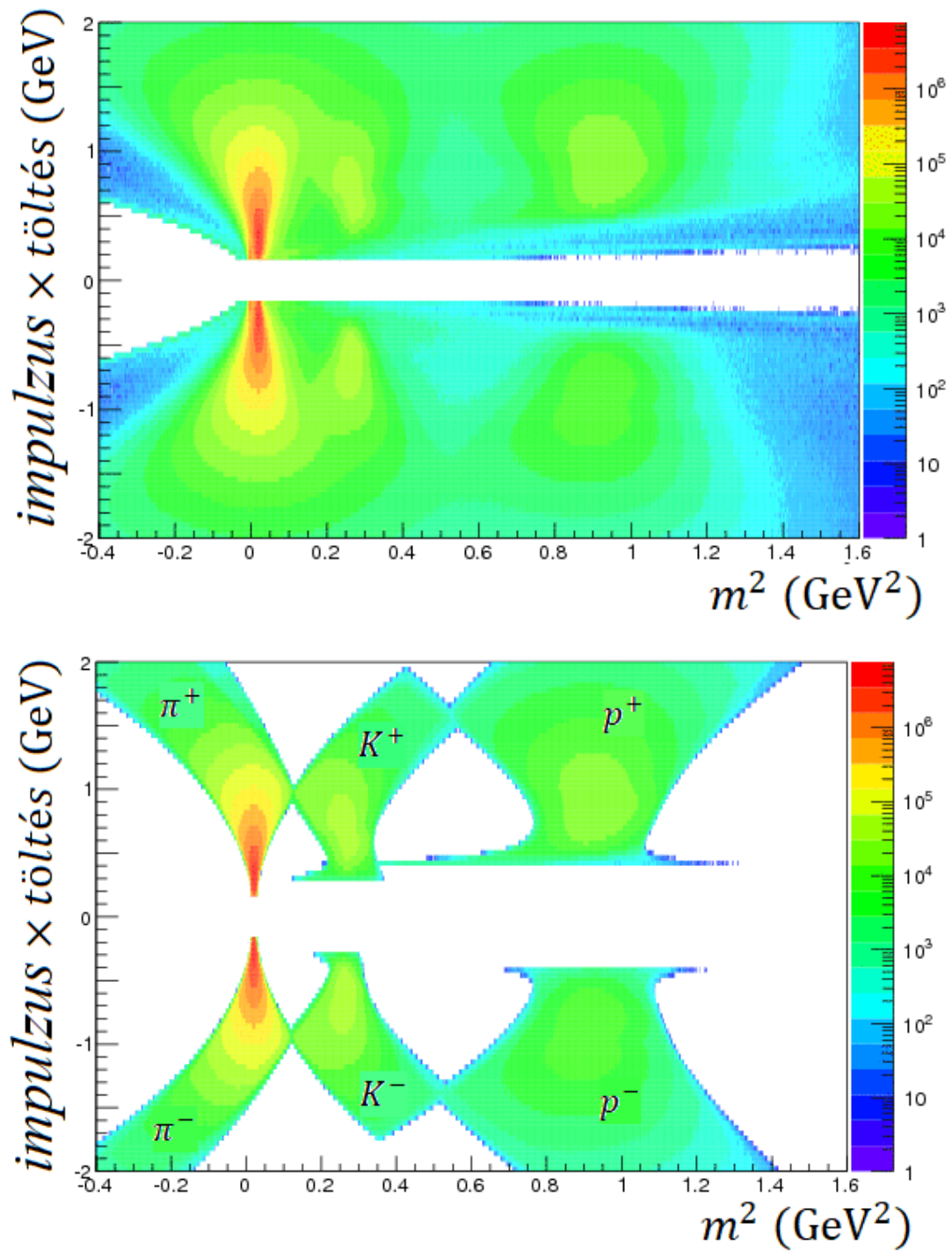
asszociált (a jelekből hozzárendelt, ld. egyrészecske vágások) beütés között kisebb legyen a különbség, mint  $2\sigma$  a  $z$  és a  $\varphi$  koordinátákban is.

### 7.3. Az egy- és kétrészecske vágások

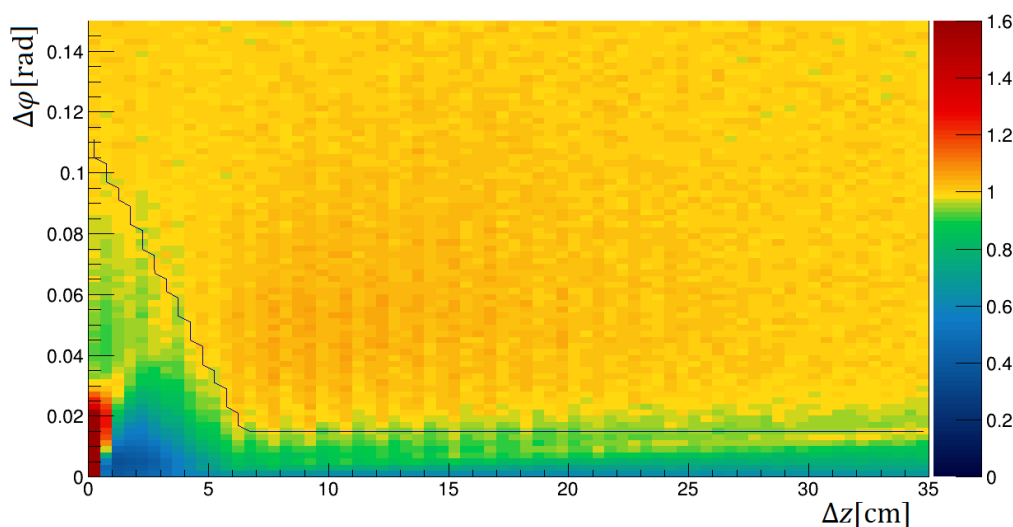
A mérés során az azonosított részecskenyomokra, illetve a létrehozott párokra vonatkozólag bizonyos feltételeknek kell teljesülniök. A részecskenyomok esetén azt kell biztosítanunk, hogy a nyom valódi, azaz nem egy véletlenül talált mintázat alapján azonosította az algoritmus. A párok esetén két track viszonyát kell vizsgálnunk. A térbeli felbontás végeessége miatt fellépő, ún. *merginget*, azaz két részecskenyom egyként való értelmezését és *splittinget*, azaz egy nyom kettőként való értelmezését kell kiszűrniük. Ezek a párvágások. A vágások olyan feltételeket jelentenek, melyekkel a detektált részecskéket két nagy csoportra osztjuk: *elfogadott* és *nem elfogadott*. Az, hogy mely részecskéket fogadjuk el, azaz használjuk fel a méréseink során, s melyiket nem, önkényes, de megalapozott választás, melytől függenek az eredmények. Az eredményeknek a vágások megválasztásától való függését szisztematikus hibaforrásoknak nevezzük. Minden önkényesen megválasztott beállítást szisztematikus hibának vehetünk, s így ide tartozik pl. az illesztési tartomány megválasztása is. Minderről pontosabban a 7.6. fejezetben lesz szó.

#### 7.3.1. Egyrészecske vágások

A 7.2.2. szakaszban tárgyaltam a nyomkövetést, illetve leírtam, hogy a hagyományos detektorrendszer belső részével (DC, BBC, PC) kapott részecskenyomokat a külső részekbe (PbSc és PbGl kaloriméterekbe) vetítjük és megnézzük, hogy ott találunk-e a nyomnak megfelelő beütést. A kérdés az, hogy mennyire pontos egyezést követelünk meg. Ez természetesen egy önkényes választás, melyet hagyományosan  $2\sigma$ -nak veszünk, azaz ennyire térhet el a leképezett



30. ábra. A felső ábrán a részecskék (impulzus × töltés) és az  $m^2$  függvényeként való eloszlását láthatjuk. A színek a gyakoriságot, azaz a beütésszámot jelentik. Az alsó ábrán a részecskeazonosítás utáni állapot látható. A hat nagy régió a  $\pi^\pm$ ,  $K^\pm$ ,  $p^\pm$  részecskéknek felelnek meg.



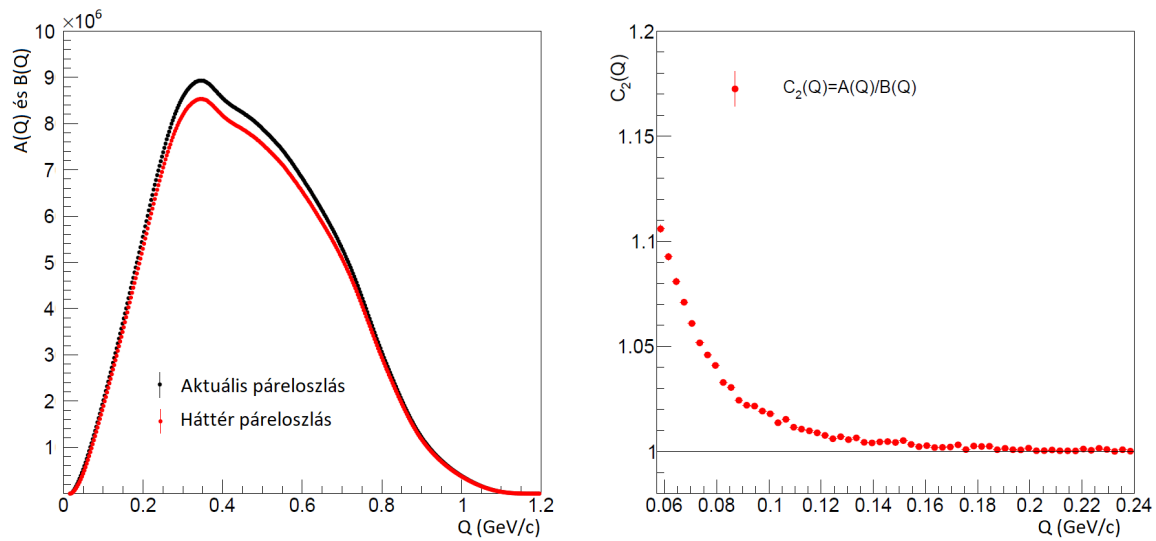
31. ábra. A drift kamrában detektált párok számának eloszlása a koordinátáik különbsége szerint. Az eloszlás a nagy  $\Delta z - \Delta\varphi$ -s tartományra van normálva. A kis  $\Delta z$  és kis  $\Delta\varphi$  értékeknél figyelhetjük meg a *splitting*-et (piros terület sok párral) és a *merging*-et (kékes terület, kevés párral). A vonal (vágás) alatti részhez tartozó párokat nem használtuk fel.

jel a talált beütéstől. Ettől a választástól függhetnek az eredmények, a kapott paraméterértékek, ezért ezt a választást egy szisztematikus hibaforrásnak tekintjük.

### 7.3.2. Kétrészecske vagy párvágások

A kétrészecske korrelációs függvényekhez párokat kell létrehozni, amint azt később részletezzük, s így fontos tudni, hogy az a két részecskenyom, amit két külön részecskének tekintünk, mennyire bizonyosan tartozik két részecskéhez. A detektor véges helyfelbontásából következően előfordulhat ugyanis, hogy az algoritmus összeolvaszt (*merging*) valójában különböző részecskenyomokat vagy két részecskenyomnak tekint egy részecskenyomhoz tartozó beütéseket (*splitting*). E jelenségek megfigyeléséhez a legszemléletesebb a párok számát ábrázolni a pár részecskéinek  $z$  és  $\varphi$  koordinátáinak különbségének függvényeként ( $\Delta z$  és  $\Delta\varphi$ ). Egy ilyen eloszlás látható a 31. ábrán a drift kamra esetében egy adott  $p_T$  tartományon a 0-10%-os centralitásosztályban.

Látható, hogy a nagy koordináta különbségekre normálva a kis  $z$ -, illetve kis  $\varphi$ -beli különbségek esetén két érdekes struktúra is megjelenik, míg messze az origótól egyenletes eloszlást látunk. Egészen kicsi azimuttszög különbségeknél mintha sokkal több pár lenne, viszont kis  $z$ -vertex különbségeknél mintha éppen hogy sokkal kevesebb. E jelenségek rendre a *splitting* és *merging*. Az ilyen rosszul rekonstruált track-eket nem szeretnénk a végső mintánkban tudni, ezért kivágjuk ezt a tartományt, azaz nem használjuk fel a korrelációs méréseinkhez. S mivel ezt a vágást a párokra végezzük el, ezért párvágásnak nevezzük. Az ábrán látható vonal azt jelzi, hogy hol történik ez a párvágás. A vonal alatti részről jövő párokat nem használjuk fel, míg a vonal feletti részről jövőket igen. Hasonló párvágásokat kell elvégezni a kaloriméterek és



32. ábra. Példa aktuális és háttér páreloszlás (bal oldalon) s a kettő hányadosa, a kétrészecske korrelációs függvény (jobb oldalon) egy adott centralitásozttályban és  $p_T$  tartományban mérve.

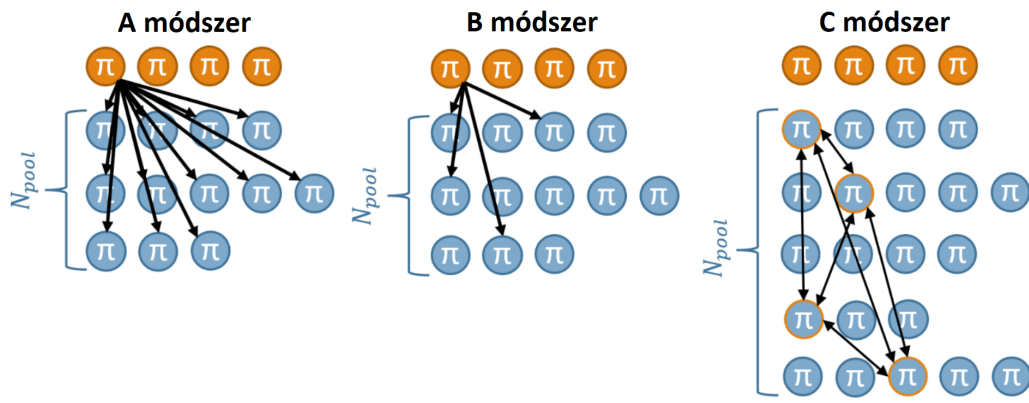
a repülési idő detektorok esetén is.

#### 7.4. A páreloszlások mérése

Az impulzuskorrelációt a pár átlagos impulzusának és impulzuskülönbségének függvényeként mérjük. Amint azt a 4. fejezetben már tárgyaltam, az átlagos impulzustól való függés sokkal simább, mint az impulzuskülönbségtől való függés, ezért szokás az impulzuskülönbségtől való függést paraméterezni és ennek paramétereit az átlagos impulzus függvényeként vizsgálni.

Első lépésként az aktuális páreloszlást ( $A(Q)$ ) mérjük. Ezt úgy határozzuk meg, hogy egy adott eseményben kiszámoljuk a hisztogramba rendezzük részecskék impulzusainak különbségeit. Ez az eloszlás egyrészt a HBT effektusból származó impulzuskorrelációt is tartalmazza, de sok más effektust is, melyek azonban akkor is fellépnek, ha a párokat nem azonos eseményekből származó részecskékből állítjuk össze. Ezeket szeretnénk eltávolítani, ezért definiálunk egy háttér páreloszlást is.

A háttér páreloszlás ( $B(Q)$ ) tartalmaz olyan effektusokat és korrelációkat, amelyek az aktuális páreloszlásban is megvannak, például az impulzusmegmaradásból eredőeket, az akceptancia effektusokat, de nem tartalmazza a kvantumstatistikai eredetű korrelációkat (és a végállapot effektusokat sem, mint amilyen a részecskék közötti Coulomb- és erős kölcsönhatás). Ezáltal alkalmas arra, hogy ezeket a korrelációkat és effektusokat az aktuális eloszlásból eltávolítsuk, s így nem marad más, mint a Bose–Einstein-korreláció és egyéb femtoszkópiái eredetű hatás (pl. a végállapot Coulomb-kölcsönhatás). A két eloszlásra látható példa a 32. ábra bal oldalán. E két eloszlás hányadosa lesz a korrelációs függvény, mely az ábra jobb oldalán látható. Ezt az eloszlást paraméterezzük.



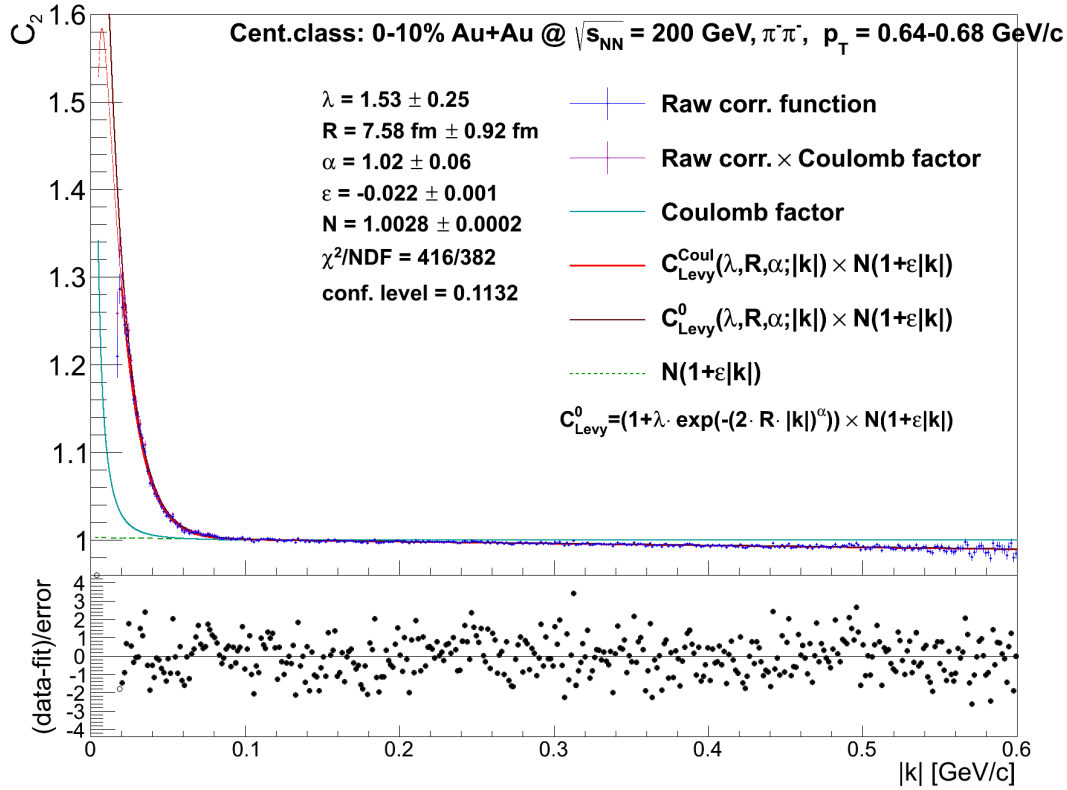
33. ábra. A háttérkeverési eljárás, mely mindig különböző eseményekből vesz annyi részecskét a háttér páreloszlás megkonstruálásához, amennyi az aktuális páreloszlás multiplicitása.

A háttéreloszlás mérésekor óvatosan kell eljárunk, mert nem akarunk a kinormált korrelációk és effektusok helyett újakat bevezetni egy rosszul megválasztott módszerrel. Fontos, hogy a háttéreloszlás párhoz hasonló centralitásúak és  $z$ -vertex pozíciójúak legyenek, hogy az akceptancia-effektusokat minimálisra redukálhassuk. Ehhez az eseményeket 3% széles centralitásosztályokba és 2 cm-es  $z$ -vertex osztályokba soroltuk, s megköveteltük, hogy a  $C$  hisztogram előállításakor az  $A$  és a  $B$  eloszlások ugyanolyan centralitás és  $z$ -vertex osztályon belüliek legyenek.

Másfelől a háttér eloszlás megkonstruálása sem egyértelmű, többféleképpen is eljárhatunk. Három ilyen módszert illusztrál a 33. ábra. Mindhárom módszer esetén szükségünk van egy sok eseményt tartalmazó ún. *mintára*. A mintának akkorának kell lennie, amekkora az aktuális eloszlásban lévő események maximális multiplicitása. Ezt a méretet egyszerűen 50-nek választottuk a későbbiekben bemutatott analízisben. Ezután, mindig amikor feldolgozunk egy eseményt, konstruálunk egy aktuális páreloszlást és egy háttér páreloszlást is. Utóbbit úgy tesszük, hogy a mintából választunk annyi részecskét, amennyi az éppen feldolgozott aktuális esemény multiplicitása, azaz amennyi részecskét tartalmaz. A kérdés az, hogy hogyan válasszuk ki a részecskéket a mintából? Elkerülendő mindennemű új korreláció bevezetését a  $C$  módszert alkalmaztuk. A részecskéket a mintából véletlenszerűen választottuk ki vigyázva, hogy a részecskék különböző eseményekből jöjjenek.

Így megmértük az aktuális és háttér páreloszlásokat, alkalmaztuk a szükséges vágásokat, s így kétrészecske korrelációs függvényeket előállíthatjuk a két eloszlás hányadosaként.





34. ábra. Példa a 0-10% centralitásnál mért korrelációs függvényre a  $p_T = 0.64 - 0.68$  GeV/c transzverz impulzustartományon, ami  $m_T = 0.655 - 0.694$  GeV/c transzverz tömegtartomány-nak felel meg.

## 7.5. A korrelációs függvények és illesztésük

Az előző fejezetben bemutatott páreloszlások normált hányadosa lesz a pár impulzuskülönbségtől függő korrelációs függvényünk egy adott átlagos transzverz impulzus binben:

$$C_2(Q) = \frac{A(Q)}{B(Q)} \cdot \frac{\int_{Q_{\text{int},\text{min}}}^{Q_{\text{int},\text{max}}} B(Q)}{\int_{Q_{\text{int},\text{min}}}^{Q_{\text{int},\text{max}}} A(Q)}. \quad (203)$$

A  $Q_{\text{int},\text{min}}$  és  $Q_{\text{int},\text{max}}$  integrálási határok olyan tartományokat jelölnek, ahol már nincs kvantumstatistikai korreláció. (A hosszú, indexbeli jelölést azért vezettem be, hogy a későbbiekben tárgyalt  $Q_{\text{min}}$  és  $Q_{\text{max}}$ , illesztési határoktól megkülönböztessem az integrálási határokat.)

A korrelációs függvényeket a (203) egyenletben leírt módon definiáltam a mért aktuális és háttér páreloszlásokból, 18  $m_T$  bint és 6 centralitásoztszályt használva. Az adatok illesztéséhez a korábban definiált Lévy korrelációs függvényt használtam a Coulomb-kölcsönhatás figyelembevételével. Ilyen illesztéseket végezve adódik a paraméterek  $m_T$  és  $N_{\text{part}}$  függése. A háttérrel lineárisnak tételeztem fel, s olyan szakaszon illesztettem az adatokat vele, ahol a Bose–Einstein

Hibaforrás neve	Beállítások
Detektorkar	keleti, nyugati, mindkettő
PID vágások	3 beállítás
PID detektor matching vágás	3 beállítás
PC3 matching vágás	3 beállítás
PID detektor párvágás	3 beállítás
Drift kamra	3 beállítás
Illesztési tartomány ( $Q_{\min}$ )	3 beállítás
Illesztési tartomány ( $Q_{\max}$ )	részletesen nem vizsgált

4. táblázat. Az analízis során vizsgált szisztematikus hibaforrások.

korrelációnak már nem volt hatása. A 34. ábrán látható egy példaillesztés a 0-10% centralitásosztályból  $p_T \in 0.64-0.68$  transzverz impulzusbinben. Az illesztéseket  $\chi^2$  minimalizálással végeztem, melyhez a CERN ROOT Minuit2 könyvtárát használtam.

Bár a Coulomb-korrekciónról részletesen írtam a 6. fejezetben, az analízis szempontjából fontos gondolatokat még egyszer összefoglalom. Mivel töltött részecskék között fellépő kvantumstatisztikai korrelációt mértem, a párt alkotó részecskék között fellépő Coulomb-kölcsönhatást is figyelembe kellett venni, s nem lehetett egyszerűen az ismert, zárt Lévy-alakot az adatokra illeszteni. Ehhez a kétrészecske Coulomb-kölcsönható hullámfüggvényét kell meghatározni, s összeintegrálni a forrásfüggvénnyel. Ez az integrál nem végezhető el analitikusan, ezért numerikus eljárásokat kell alkalmazni. Amint azt a 6. fejezetben részletesen tárgyaltam, ezt kétféleképpen is megtehetjük: alkalmazhatunk egy numerikus táblázatot vagy egy parametrizációt. A numerikus táblázat esetén az integrált sok, de véges paraméter- és változóérték mellett kiszámítjuk és a kapott értékeket numerikus táblázatban tároljuk. Nem tudjuk végtelen pontossággal feltölteni a táblázatot, de arra az esetre, ha egy el nem tárolt értéket kérdeznénk le, biztosíthatunk interpolációs módszereket. Az általam használt táblázatban is ez volt az eljárás. A táblázat és az interpoláció numerikus fluktuációkat vezethet be az illesztések  $\chi^2$  térképeibe, melyek félrevezethetik a  $\chi^2$ -et minimalizáló algoritmust. Ezt iteratív illesztési eljárással ki lehet küszöbölni, amint azt a 6. fejezetben részleteztem. A centralitásfüggő analízis során is ezt a módszert használtam [114], melynek eredményeit a 8. fejezetben mutatom be.

## 7.6. Szisztematikus hibavizsgálat

Az eddigiekben már többször említettem, hogy a vágások alkalmazásakor és általában a mérés során önkényes választásokat teszünk. Ezek a választások az eredményeket befolyásolhatják, ezért a hatásukat a szisztematikus hibavizsgálattal kell figyelembe venni. Jelen analízis során 8 ilyen hibaforrást vizsgáltunk meg, melyeket a 4. táblázatban foglaltam össze.

Lássuk részletesebben, hogy mit jelentenek az egyes hibaforrások:

- Detektorkar: A PHENIX detektornak két karja van, a keleti és a nyugati, amint azt a 7.1. fejezetben bemutattam. A két kar különböző detektorokat tartalmaz, ezért ha csak az egyiket vagy csak a másikat használjuk más-más értékeket kaphatunk az egyes paraméte-

Párvágások	Drift kamra			ToF kelet		ToF nyugat		EMCal		
	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_1$
Alapbeállítás	0,12	8	0,017	0,12	12	0,075	14,0	0,12	16	0,015
Gyenge drift kamra vágás	0,11	7	0,016	0,12	12	0,075	14	0,12	16	0,015
Erős drift kamra vágás	0,13	9	0,018	0,12	12	0,075	14	0,12	16	0,015
Gyenge PID vágás	0,12	8	0,017	0,11	11	0,070	13	0,11	15	0,013
Erős PID vágás	0,12	8	0,017	0,13	13	0,080	15	0,13	17	0,017

5. táblázat. A párvágások egyenleteiben használt állandók értékei a különböző vágások esetén. A  $\Delta\varphi_0$  és  $\Delta\varphi_1$  mértékegysége radián, a  $\Delta z_0$ -é pedig centiméter.

rekre. Megvizsgáltam a karválasztásból eredő bizonytalanságot alapbeállításnak mindkét kar használatát véve.

- A PID vágások: A részecskeazonosítás során az  $m^2$  hisztogramon alkalmazott vágások alapbeállítása  $2\sigma$  volt, míg a szigorúbb  $1\sigma$ , a gyengébb pedig  $2,5\sigma$ .
- A PID matching vágások: A részecskeazonosítás során a belső detektorokból a külsőbe vetített részecskenyomok eltérése a valóban ott mérttől alapesetben  $2\sigma$  lehetett, a gyengébb esetben  $2,5\sigma$ , a szigorúbb esetben  $1\sigma$ .
- A PC3 matching vágások: A mérés során a PC3 nevű detektorban nem vágunk, ezért ennél egy szigorú ( $2,5\sigma$ ) és egy szigorúbb vágás ( $2\sigma$ ) volt a két alternatíva.
- Párvágások: A párvágásokat az EMCAL és a ToF detektorokban és a drift kamrákban alkalmaztam. Ezek bonyolultabbak, mint az előbbieket, a  $\Delta z - \Delta\varphi$  síkban megadott egyenlőségekkel definiáltak:
  - ToF kelet:  $\Delta\varphi > \Delta\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta z_0} \Delta z$
  - ToF nyugat:  $\Delta\varphi > \Delta\varphi_0$  és  $\Delta z > \Delta z_0$
  - EMCAL és drift kamra:  $\Delta\varphi > \Delta\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta z_0} \Delta z$  és  $\Delta\varphi > \Delta\varphi_1$

Az egyenlőségekben szereplő állandók a különböző esetekre az 5. táblázatban láthatóak.

- $Q_{\min}$  választás: A mért értékek érzékenyek mutatkoztak az illesztési tartomány kezdetének megválasztására. Az ettől az értéktől való függést úgy vizsgáltam, hogy a meghatározott kezdő  $Q_{\min}$  binhez képest eggyel kisebb sorszámú bintől, azaz kisebb  $Q$  értéktől kezdtem az illesztést, vagy eggyel nagyobb  $Q$  bintől, azaz nagyobb  $Q$  értéktől kezdtem az illesztést. Egy  $Q$ -bin 3 MeV/c széles volt az analízis során.
- $Q_{\max}$  választás: Vizsgáltam az illesztési tartomány végének megválasztásától való függést, de sok különböző  $Q_{\max}$  érték mellett sem tapasztaltam függést, ezért ezt a forrást nem vettem figyelembe az analízis során.

Egy adott forrásból származó szisztematikus hiba nagyságát úgy határozhatjuk meg, hogy az alapbeállítás mellett másik két beállítással is elvégezzük a mérést és meghatározzuk a paraméterek  $m_T$ -függését. Ilyen vizsgálatot mutat a 35. ábra, melyen a különböző vágások különböző beállításainak a  $\lambda(m_T)$  pontokra gyakorolt hatását láthatjuk. Mind a hét esetben (a  $Q_{\max}$  függés elhanyagolható volt) az alapbeállítást két eltérő beállítással hasonlítottam össze. A vágások esetén az alapbeállítás mellett egy szigorúbb és egy kevésbé szigorú beállítást választottam, az illesztés kezdetétől való függés vizsgálatakor egy pontot hozzáadtam, illetve elvettem a tartományhoz. A detektorkar választásánál az alapbeállítás mindkét kar használatát jelentette, a két alternatív beállítás pedig csak a keleti vagy csak a nyugati kar használata volt. Így egy hibaforrás esetén minden  $m_T$  és  $N_{\text{part}}$  értékhez három pont tartozott.

A kérdés az, hogy az így kapott három pontból hogyan származtassuk a szisztematikus hibát. Ezt többféleképpen is megtehetjük. Kiszámíthatjuk a három pont átlagát és az attól való eltérések összegét tekinthetjük a szisztematikus hibának. Ugyancsak ésszerű a gyengébb, illetve szigorúbb vágásokból származó értékeknek az alapbeállítástól való eltérését szisztematikus hibaként felfogni. Utóbbi módszer esetén, ha mindkét beállítás az alapbeállításnál nagyobb (vagy kisebb) értéket ad (ami a PC3 vágások esetén tipikus) akkor két lehetőségünk van: vagy a két alternatív beállítás átlagát, vagy a kettő közül a nagyobbikat tekintjük szisztematikus hibának. A módszereket a 36. ábrán szemléltetem.

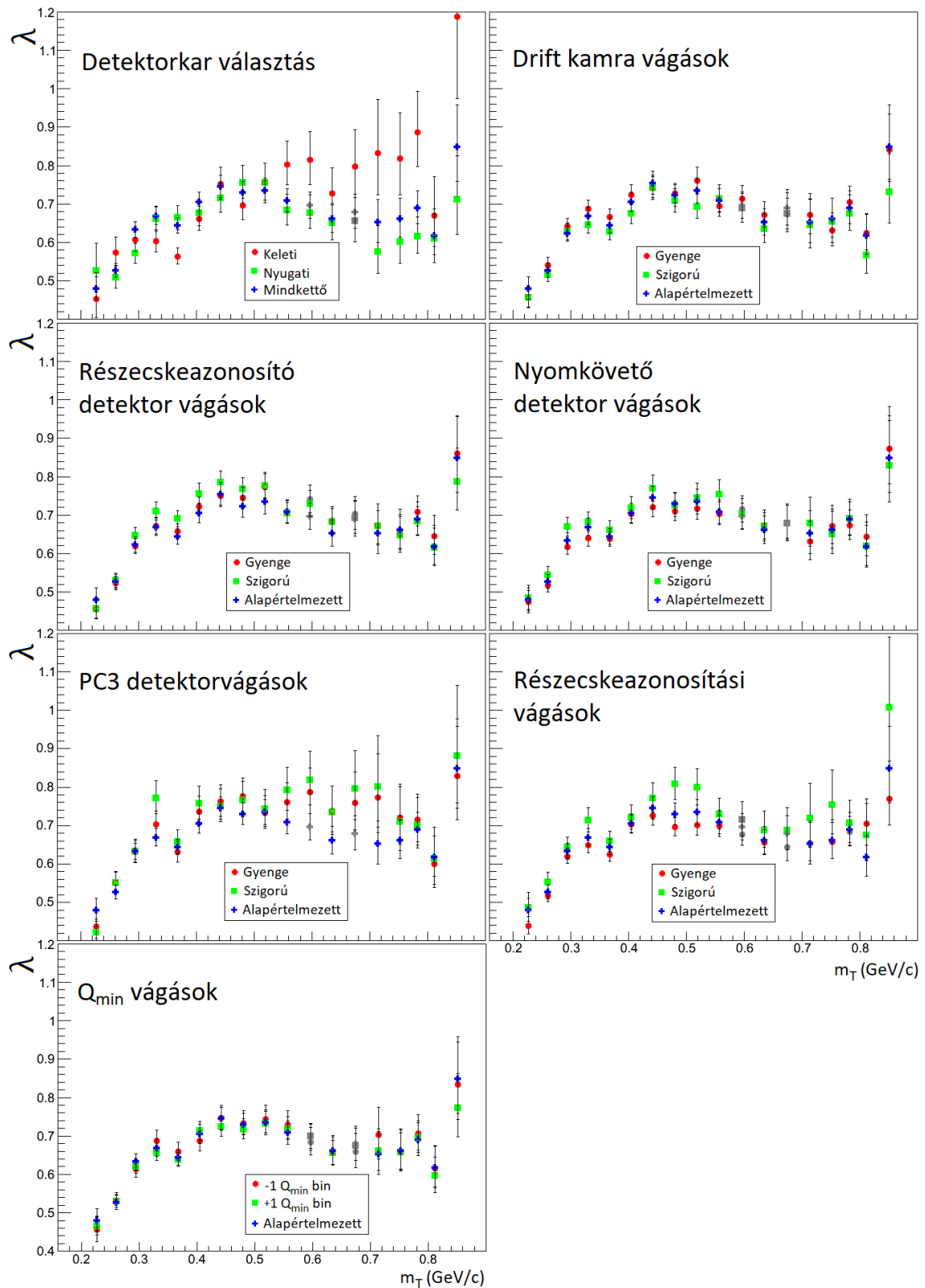
A 8. fejezetben bemutatott eredményekhez az alapbeállítástól való eltéréseken alapuló módszert használtam. A 9. fejezetben azt is bemutatom, hogy miként lehet a szisztematikus hiba származtatása során a statisztikus hibát is figyelembe venni. Ezzel meghatároztam, hogy az egy forrásból eredő bizonytalanságból hogyan határozható meg a szisztematikus hiba. Jelen esetben azonban hét hibaforrásunk van. A végső szisztematikus hibát az egyes forrásokból adódó hibák négyzetes összegéként határozzuk meg.

Illusztrációként tekintsünk csupán két hibaforrást, s vizsgáljuk meg ezeket egy adott  $m_T$  érték-nél. Jelölje a két hibaforrást adott  $m_T$ -nél  $A$  és  $B$ . Mindkettőnek három beállítási lehetősége van, egy alap és két alternatív:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_{\text{alap}}$  és  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_{\text{alap}}$ . Mi lesz tehát a végső szisztematikus hiba az adott  $m_T$  binben ebben az egyszerű esetben? A fentiek szerint

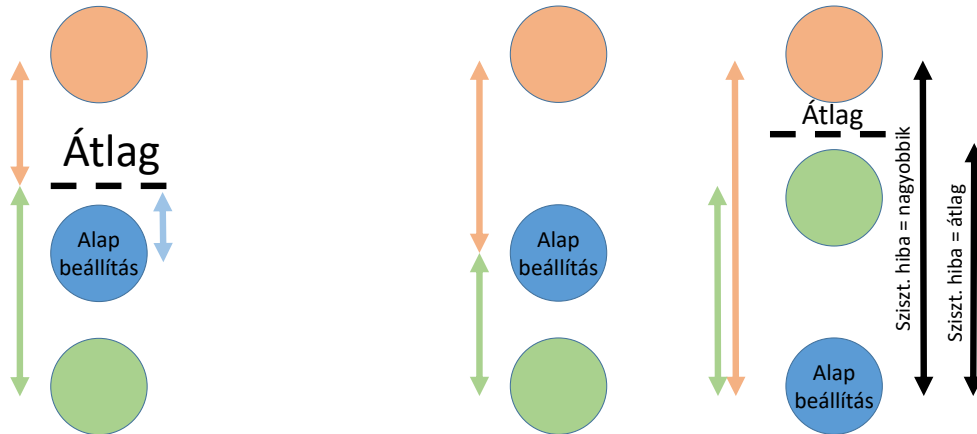
$$\begin{aligned}\sigma(A_1) &= \frac{A_{\text{alap}} - A_1}{A_{\text{alap}}} & \sigma(B_1) &= \frac{B_{\text{alap}} - B_1}{B_{\text{alap}}} \\ \sigma(A_2) &= \frac{A_{\text{alap}} - A_2}{A_{\text{alap}}} & \sigma(B_2) &= \frac{B_{\text{alap}} - B_2}{B_{\text{alap}}} \\ \sigma(A_{\text{végső}}) &= \sqrt{\sigma^2(A_1) + \sigma^2(A_2)} & \sigma(B_{\text{végső}}) &= \sqrt{\sigma^2(B_1) + \sigma^2(B_2)}\end{aligned}$$

Ezek alapján pedig a két forrásból származó szisztematikus hiba

$$\sigma(A_{\text{végső}} + B_{\text{végső}}) = \sqrt{\sigma^2(A_{\text{végső}}) + \sigma^2(B_{\text{végső}})}.$$



35. ábra. A  $\lambda(m_T)$  értékek a 30-40%-os centralitásnál a különböző vágásokkal és beállításokkal. A kék keresztjek jelzik a pontokat, melyek az alapbeállítással adódnak, a pirosak a gyengébb, a zöldek az szigorúbb vágást jelentik. Látható, hogy a  $\lambda(m_T)$  értékek mások a különböző vágások esetén. A hét ábra a hét vizsgált hibaforráshoz tartozik (ld. 4. táblázat).



36. ábra. A szisztematikus hiba származtatása a különböző beállításokból kapott értékekkel. Az átlag a három pont átlagát jelölik, a nyilak pedig az ettől való eltérést. A bemutatandó analízis során az utóbbit, azaz az alapbeállítástól való eltérésen alapuló használatom, melyet a középső és a jobb oldali ábra szemléltet.

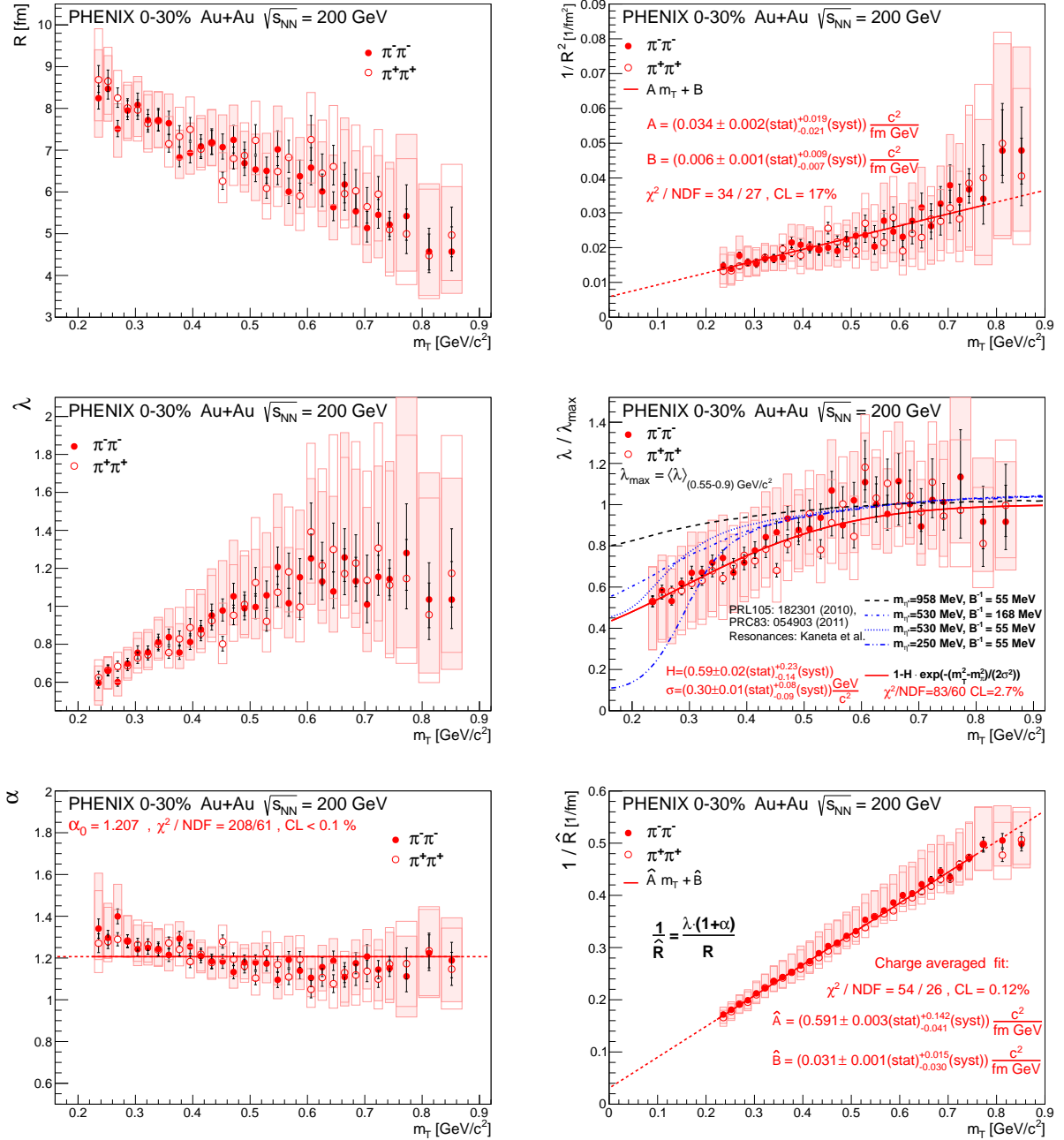
Az általános képlet a szisztematikus hibára egy adott  $m_T$  értékhez tartozó  $P$  pontban

$$\delta P_{\uparrow} = \sqrt{\sum_{n=\text{vágások}} \frac{1}{N_n^{j\uparrow}} \sum_{j \in J_n^{\uparrow}} (P_n^j(i) - P^0(i))^2} \quad (204)$$

$$\delta P_{\downarrow} = \sqrt{\sum_{n=\text{vágások}} \frac{1}{N_n^{j\downarrow}} \sum_{j \in J_n^{\downarrow}} (P_n^j(i) - P^0(i))^2}, \quad (205)$$

ahol  $j$  az egy forráshoz tartozó beállításokat indexeli,  $J_n^{\uparrow}$  és  $J_n^{\downarrow}$  ezen beállítások egy-egy halmaza és  $N_n^{j\uparrow}$  e halmaz számossága. Mivel az alternatív beállítások nem feltétlenül ugyanolyan mértékben befolyásolják a mért pontokat a nagyobb vagy a kisebb értékek irányába, ezért a szisztematikus hibák általában aszimmetrikusak.

Az a kérdés is feltehető, hogy  $m_T$  binről  $m_T$  binre mennyire korreláltak a szisztematikus hibák. Ez HBT korrelációs mérések esetén egy nehezen megválaszolható kérdés, de megvizsgálva az összes szisztematikus hibaforrást azt tapasztalhatjuk, hogy adott paraméterek adott vágásokra tipikusan viselkednek. Megfigyelhetjük a 35. ábrán, hogy a legtöbb szigorú, azaz az alapbeállításnál erősebb vágás a  $\lambda(m_T)$  értékét megnöveli. Ez nem mindenhol és minden pont-ra, de általában igaz. Feltehetjük a kérdést, hogy a különböző vágások hogyan befolyásolják a többi vágást, azaz mennyire erős a korreláció a szisztematikus hibák között. Ennek figyelmen kívül hagyása ugyanis fluktuációkat okozhat  $m_T$  binről  $m_T$  binre, s ez a fluktuáció valójában



37. ábra. A Lévy-skála paraméter (fent, balra) és az  $1/R^2$  (fent, jobbra) az  $m_T$  függvényében. A mért  $\lambda$  paraméter mért értékei (középen, balra) és a nagy  $m_T$ -s értékével normált értékei (középen, jobbra). A Lévy stabilitási index (lent, balra), melynek gyenge nem-monotonitását figyeltük meg az  $m_T$  függvényeként. A Lévy-paraméterek egy kombinációja meglepően lineáris az  $m_T$  függvényeként. Erre a paraméterre egyelőre nem létezik elméleti jóslat vagy magyarázat (lent, jobbra).

mesterséges<sup>15</sup>. A legegyszerűbb megoldás, ha egy simító eljárást alkalmazunk a szisztematikus hibákon. Ez tradicionális módszernek számít, s lényege, hogy első vagy második szomszédig összeátlagoljuk a szisztematikus hibákat a következőképpen:

- Az első és utolsó binben maradnak az eredeti értékek.
- A második és az utolsó előtti binre csak „első szomszéd”-simítás.
- $i$ .  $m_T$  binre „második szomszéd”-simítás:  $\langle x_i \rangle = \frac{1}{9} (x_{i-2} + 3x_{i-1} + 9x_i + 3x_{i+1} + x_{i+2})$ .

Ez a simítás kezelni tudja a  $m_T$  binről  $m_T$  binre mutató fluktuációkat.

## 7.7. Eredmények 0-30% centralitású eseményekre

A PHENIX kísérletnél (7.1. fejezet és [117]) végzett kétrészecske korrelációs mérések során arany-arany ütközésekben detektált pionokat vizsgáltunk az  $m_T = 0.24 - 0.85$  GeV/c transzverz tömeg tartományon. Meghatároztuk a Lévy-paraméterek  $m_T$ -függését 0-30% centralitás szelekció mellett. Az eredmények a 37. ábrán láthatóak. Az eredményeket részletesen a [60] cikk közli. A dolgozatom fő része a centralitásfüggő analízist tárgyalja, de a 0-30%-os eset, mint példa, szintén fontos.

A 37. ábrán, a felső sorban látható, hogy a Lévy-skála paraméter nagyon hasonlóan viselkedik a Gauss-sugarakhoz: az  $R \sim \frac{1}{\sqrt{A+Bm_T}}$  alak itt is érvényes [58, 79, 80]. A középső sorban a  $\lambda$  és a normált,  $\lambda/\lambda_{\max}$  paramétereket láthatjuk. Jól megfigyelhető a paraméternek a kis  $m_T$  tartományon megjelenő elnyomása, melyet több rezonancia modellel hasonlítottunk össze. A mért eredmények nem inkompatibilisek az  $\eta'$  tömegének csökkenésével. Az alsó sorban látható, hogy a Lévy-exponens, akár csak 3D-ben, 1D-ben is messze van a Gauss-esetnek megfelelő  $\alpha = 2$  értéktől, az átlagértéke  $\alpha \approx 1.2$  és gyengén függ az  $m_T$ -től, vagyis az átlagérték nem reprezentálja az adatokat. Ez a mért érték szintén messze van a jósolt kritikus értéktől [82, 83]. A jobb alsó ábrán egy érdekes, nem jósolt, empirikusan talált új paraméter látható, mely meglepően lineáris az  $m_T$  függvényében.

## 7.8. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a részecskeazonosítástól a szisztematikus hiba kezeléséig bemutattam azon kísérleti módszereket, amelyekkel a 8. fejezetben tárgyalt analízis eredményeit kaptam. Röviden bemutattam egy korábbi analízis eredményeit is, mely 0-30% centralitás szelekciót használt. A fejezetben tárgyalt módszerek némelyike továbbfejleszthető, s így a szisztematikus hiba csökkenthető, a Coulomb-korrekción gyorsabbá és kényelmesebbé tehető. Ezeket a fejlesztéseket és a velük készült az eredményeket a 9. fejezetben mutatom be.

<sup>15</sup>A szisztematikus hibaforrások általában besorolhatóak teljesen korrelált, részben korrelált és korrelálatlan kategóriákba. Egy HBT mérés estén azonban ez sajnos nem tehető meg, mert mindegyik hibaforrás egy mindegyik kategóriába tartozik.



## 8. A Lévy-paraméterek centralitásfüggésének vizsgálata

Az előző fejezetekben bemutattam, hogy hogyan juthatunk az azonosított részecskéktől az aktuális és háttér páreloszlások mérésén keresztül a kétrészecske korrelációs függvények illesztéséig és a paramétereik analíziséig. Tárgyaltam a végállapoti Coulomb-kölcsönhatás kezelésének lehetséges módjait és röviden ismertettem a 0-30%-os centralitás szelekciójú illesztések eredményeit. Ebben a fejezetben a Lévy-paraméterek centralitásfüggését mutatom be, melyekkel kapcsolatos eredményeimet a [114] cikkben közöltem.

### 8.1. Centralitásfüggő analízis célja

A paraméterek  $m_T$  függésén túl, melyet az előző fejezetben röviden bemutattam, más mennyiségek függvényében is vizsgálódhatunk. Az egyik ilyen mennyiség vagy változó lehet az ütközés tömegközépponti energiája. Ismerve a térbeli korrelációs függvény kritikus exponensének és a Lévy-exponensnek a lehetséges kapcsolatát (ld. 4.5. szakaszt vagy [62] cikket), egy ilyen jellegű vizsgálat ígéretes, melyről előzetes eredményeket a [120] cikkben láthatunk. A kritikus pont helye azonban nem csak az ütközési energiától, hanem az ütköző rendszer méretétől is függhet, melyet különböző atommagok ütköztetésével (pl. NA61/SHINE [121]) vagy centralitásfüggő analízist végezve lehet vizsgálni [114].

A paraméterek centralitásfüggésének vizsgálata nem csak a kritikus pont szempontjából lehet érdekes, hisz az  $N_{\text{part}}$  változó függvényében vizsgálva a paramétereket olyan kollektív jelenségekre is következtethetünk, mint a parciális koherencia megléte vagy hiánya vagy esetleges tömegmódosulások és részleteik. Az olyan elméleti modelleknek, melyek e jelenségeket írják le, számot kell, hogy tudjanak adni a paraméterek centralitásfüggéséről is. Ilyen szempontból az egyik legérdekesebb az  $\alpha$  paraméter mellett a korreláció erősségét jellemző  $\lambda$  paraméter. A Gauss-eloszlást feltételező modellek esetén is vannak olyan jóslatok, melyek a  $\lambda$  paraméter más-más viselkedését jósolják a centralitás függvényében; pontosan mérve e függéseket, kizárhatunk vagy megerősíthetünk modelleket, s ilyen pontos méréseket, alakanalízist a Lévy-parametrizációval végezhetünk, ahogy azt a 0-30%-os eredmények megmutatták. Kimutatható volt, hogy  $\lambda$  függ az  $m_T$ -től, míg a [122] cikkben tárgyalt modell nem jósol  $m_T$  függést a  $\lambda$ -nak. Különböző rezonanciamodellekkel összehasonlítva a mért  $\lambda(m_T)$  értékeket kiderült, hogy az adatok magyarázhatóak az  $\eta'$  részecske tömegének megváltozásával, s a rezonanciamodellek alapján inkompatibilisek az eredeti  $\eta'$  tömeggel.

Léteznek olyan magyarázatok az  $\alpha \neq 2$  megfigyelésre, amelyek kísérleti effektusokon alapulnak [67, 68, 123]. A felvetés szerint olyan hatások, mint az eseményátlagolás, a transzverz tömegbin szélességének megválasztása, a rezonanciaeffektusok vagy a 3D korrelációs függvény 1D projekciója befolyásolhatja a korrelációs függvény exponensének értékét. Utóbbit részletesen tárgyaltam a 4.2. szakaszban.

Mivel a korábbi analízisben csak egy, 0-30%-os centralitásosztály volt, semmit nem tudtunk meg a  $\lambda$  elnyomás centralitásfüggéséről, pedig léteznek olyan modellek, amelyek az elnyomás erős centralitásfüggését jósolják [55, 124–126]. Láttuk, hogy az  $\alpha(m_T) \approx 1.2$ , de érdemes megvizsgálni, hogy függ-e az  $N_{\text{part}}$ -tól. A Lévy-eloszlás skálaparaméterének geometriai interpretációját is megerősíthetjük vagy cáfolhatjuk a centralitásfüggő analízissel.

Ebben és a következő, 9. fejezetekben bemutatom a centralitásfüggő Lévy HBT analízis részleteit és eredményeit. A Lévy-paraméterek centralitásfüggései olyan új eredmények, melyeket eddig senki nem vizsgált és az elméleti számítások sem magyaráznak. Az ún. másodlagos paraméterek, melyek a Lévy-paraméterek valamilyen kombinációjára való illesztésekből származnak, az eredeti paraméterek értelmezését segítő információkat tártak fel. Ilyen kombináció például a Lévy-skála paraméter négyzetének inverze. A gaussi esetben az  $1/R^2(m_T)$  függvény lineáris. Ez a kombináció a Lévy-esetben is lineárisnak adódott 0-30%-os esetben, holott az  $R_{\text{Lévy}}$  nem azonos az  $R_{\text{Gauss}}$  szélességgel. Megvizsgálom az  $\alpha(m_T)$  centralitásfüggésének kérdését is. A 0-30%-os esetben láttuk, hogy a  $\lambda(m_T)$  az alacsony  $m_T$ -s tartományban elnyomódik, amely elnyomásnak a centralitásfüggése segíthet modelleket megerősíteni vagy kizárni. Példaként megemlítettem a pion lézer modellt [124], melynek létezik olyan megoldása [55, 125, 126], amely a  $\lambda$  paraméter  $m_T$  függése mellett multiplicitásfüggést is jósol, azaz ebben a modellben a  $\lambda$  paraméter függ a centralitástól. Ha tehát van elnyomás a  $\lambda(m_T)$ -ben, akkor a modell szerint az centralitásfüggő lesz. Az  $\alpha$  paraméterrel „felfegyverkezve” pontosan meg tudjuk mérni a korrelációs függvények alakját és így, e pontos alakanalízis segítségével a  $\lambda$  paraméter  $m_T$  és centralitásfüggését is.

Az illesztéseket 18 transzverz tömeg binben és 6, 10% széles centralitás osztályban végeztem. Az egyes centralitás osztályokhoz tartozó  $N_{\text{part}}$  értékeket a PHENIX kísérletre elvégzett Monte-Carlo szimulációból számítják ki, mely a különböző ütköző rendszerekre a kollaboráció tagjainak elérhetőek [26].

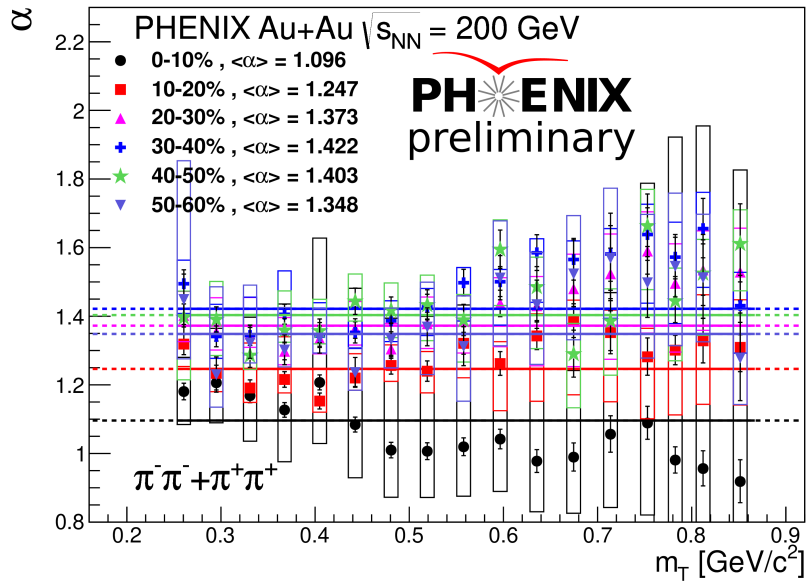
## 8.2. A stabilitási index – $\alpha$

Jelen analízis talán legérdekesebb paramétere az  $\alpha$  Lévy stabilitási index. E paraméternek a mérésétől remélhetünk információt szerezni a QCD fázisdiagramjának kritikus pontjáról, a hosszú életű rezonanciákról, valamint ennek a paraméternek a bevezetése teheti lehetővé a  $\lambda$  pontos mérését. A 38. ábrán láthatjuk az  $\alpha$  paraméter értékét a 18  $m_T$  és a 6  $N_{\text{part}}$  binben.

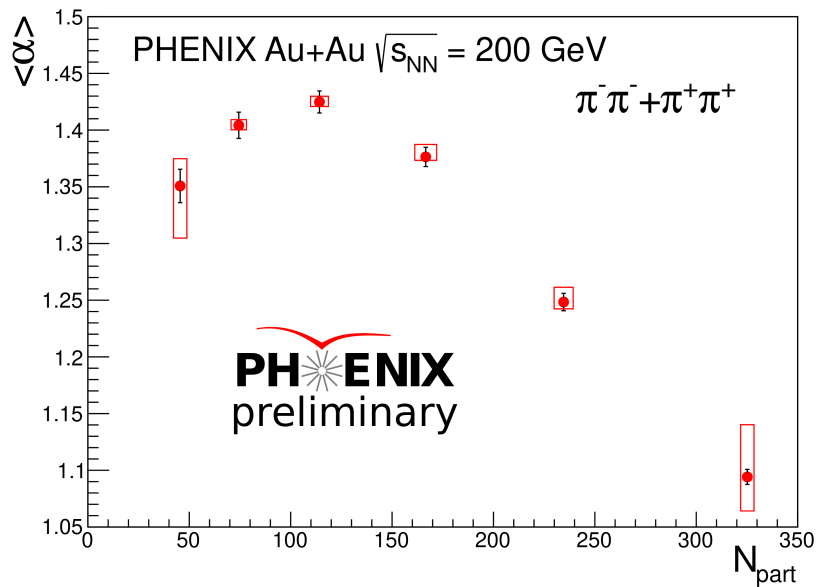
Megfigyelhetjük, hogy  $\langle \alpha(m_T) \rangle_{m_T} = \alpha_0$  egy-egy centralitásozttályon belül, azaz az  $\alpha(m_T)$  adatpontok egy-egy átlagértékkel jellemezhetőek. (Emlékeztetek, hogy ez a 7.7. fejezetben bemutatott eredmények esetén nem volt igaz.) Azt is megfigyelhetjük, hogy ez az átlagérték más minden centralitásbinben: a 0-10%-os esetben  $\alpha_0 \approx 1,1$  körüli az értéke, míg a 30-40%-os esetben nagyobb, egy 1,4 körüli maximum figyelhető meg; az  $\alpha$  paraméter tehát függ a centralitástól, amit az átlagértékeket az  $N_{\text{part}}$  függvényeként mutató a 39. ábrán jól megfigyelhető nem-monoton viselkedés jelez.

Az  $\alpha$  paraméter centralitásfüggésére nem létezik elméleti jóslat vagy magyarázat. Külön érdemes kiemelni, hogy az elterjedten használt Cauchy- és Gauss-esetek (rendre  $\alpha = 1, \alpha = 2$ ) egyikét sem erősítik meg az adatok. Ugyan a Cauchy-eset a legcentrálisabb osztályban elfogadható közelítés lehet, de általában véve az  $\alpha = \alpha(N_{\text{part}})$  függvény, mely a vizsgált energián  $m_T$  függetlennek tekinthető [114].

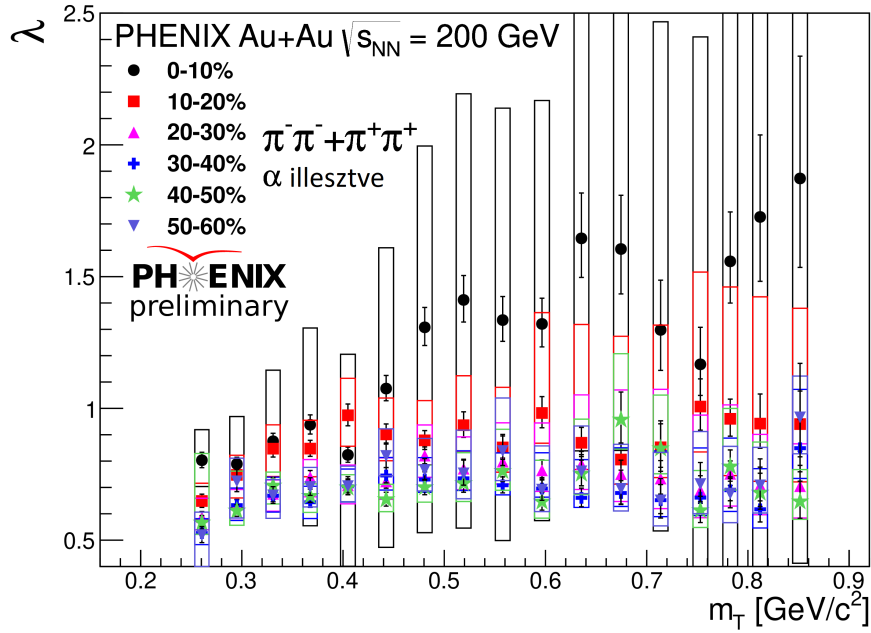
Ez az eredmény azért is fontos, mert olyan modellek és megfontolások, melyek az  $\alpha$  nem 2 és nem 1 eredetire adnak magyarázatot, csak akkor elfogadhatóak, ha a centralitásfüggést is képesek reprodukálni. Egyelőre ilyen modellről, elméleti számolásról nem tudok, de az  $\alpha$  értékének eredetére vonatkozó vizsgálatok vannak [67, 68, 123].



38. ábra. Az  $\alpha(m_T)$  stabilitási index szisztematikus hibán belül konstans, míg a centralitástól függ. Az egyes centralitásbínokhoz tartozó átlagértéket az ábrán feltüntettem.



39. ábra. A Lévy-stabilitási index centralitásfüggése nem monoton. E centralitásfüggés magyarázatára elméleti modell egyelőre nem áll rendelkezésre.



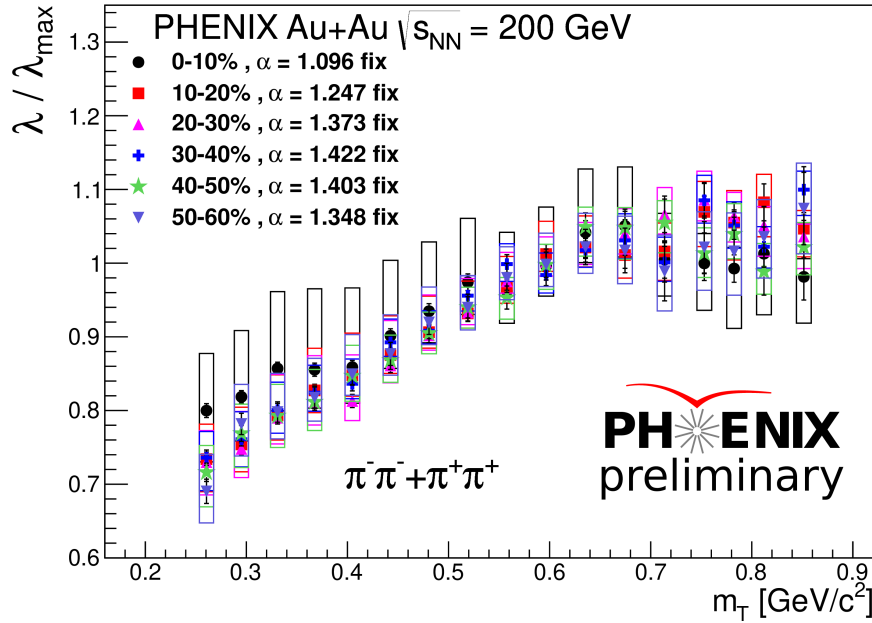
40. ábra. A korrelációs erőssége a transzverz tömeg függvényeként. Megfigyelhető a kis  $m_T$ -s elnyomás, amelyre több elméleti magyarázat is adható.

### 8.3. A korreláció erőssége – $\lambda$

A korreláció erősségének  $m_T$  függése több fizikai folyamatra is utalhat, melyeket a 4.5. fejezetben mutattam be. Már a 37. ábrán láthattuk, hogy a 0-30% centralitáosztály esetén megfigyelhető volt egy csökkenő trend kis  $m_T$ -s tartományban. Ez az elnyomás utalhat olyan fizikai folyamatokra, mint a parciálisan koherens részecskekeltés, az  $\eta'$  részecske tömegmódosulása. Mindezen folyamatoknak lehet centralitásfüggése is, ezért érdekes megmérni az elnyomás  $N_{\text{part}}$  függését. Az kis  $m_T$ -s elnyomást a centralitásfüggő analízis során is megfigyeltünk, amint az a 40. ábrán is látható.

A  $\lambda$  paraméter nem csak a parametrizáció megválasztására, hanem az analízis beállításaira is érzékeny, s így a szisztematikus hibák nagyok. Ezt azonban ki lehet küszöbölni, ha nem a  $\lambda(m_T)$  függvényt ábrázoljuk, hanem az 1-re normált alakját, a  $\lambda/\lambda_{\text{max}}(m_T)$ -t, ahol  $\lambda_{\text{max}}$  a  $\lambda(m_T)$  függvény szaturáló részén számolt átlagot jelenti. Tovább csökkenti a szisztematikus hibát, ha az illesztések során lerögzítjük az egyik paramétert. Mivel az  $\alpha(m_T, N_{\text{part}}) \approx \langle \alpha(N_{\text{part}}) \rangle_{m_T} = \alpha_0(N_{\text{part}})$  jó közelítés, ezért illeszthetjük a korrelációs függvényeket fix  $\alpha$  értékekkel, amelyek centralitásfüggők. Tehát nem egy  $\alpha$  értéket választunk, hanem hatot, minden centralitáosztályban az annak az centralitásnak megfelelőt és így nem veszítjük el a centralitásfüggésről szerzett információnkat. Az átlagértékek leolvashatók a 38. ábráról. Ilyen, fix  $\alpha$ -s illesztésekből kapott  $\lambda/\lambda_{\text{max}}$  mért adatpontokat láthatunk a 41. ábrán.

Megfigyelhető, hogy a  $\lambda/\lambda_{\text{max}}$  szintén elnyomódik a kis  $m_T$ -s tartományon. Érdekes megfigyelés továbbá, hogy a „lyuk” alakja nem is függ erősen a centralitástól. Ezt a kvalitatív megfigyelést a 9. fejezetben részletesen is megvizsgálom.



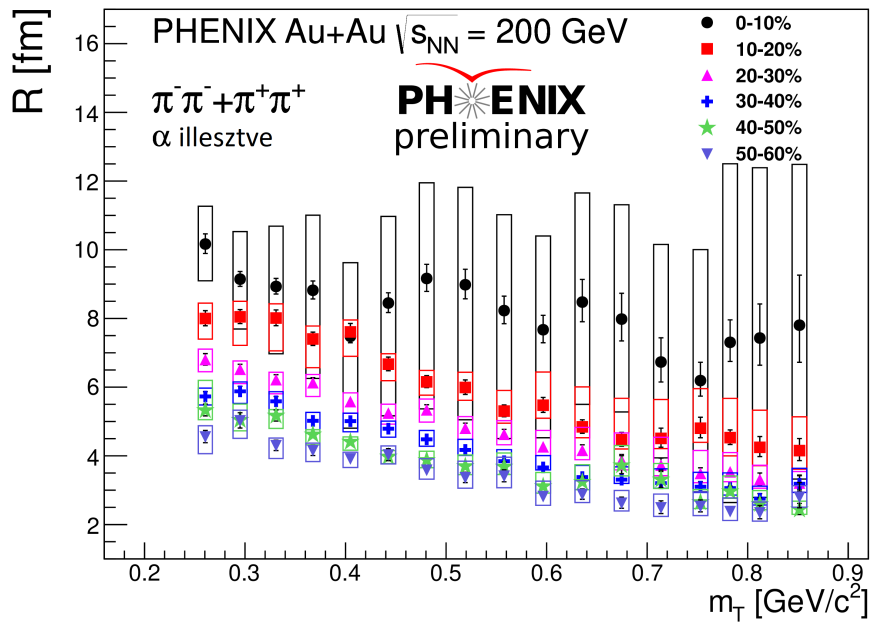
41. ábra. A  $\lambda(m_T)$ -hez hasonlóan elnyomás figyelhető meg a kis  $m_T$ -s tartományon, melynek karakterisztikája nem függ erősen a centralitástól.

#### 8.4. A Lévy skálaparaméter – $R$

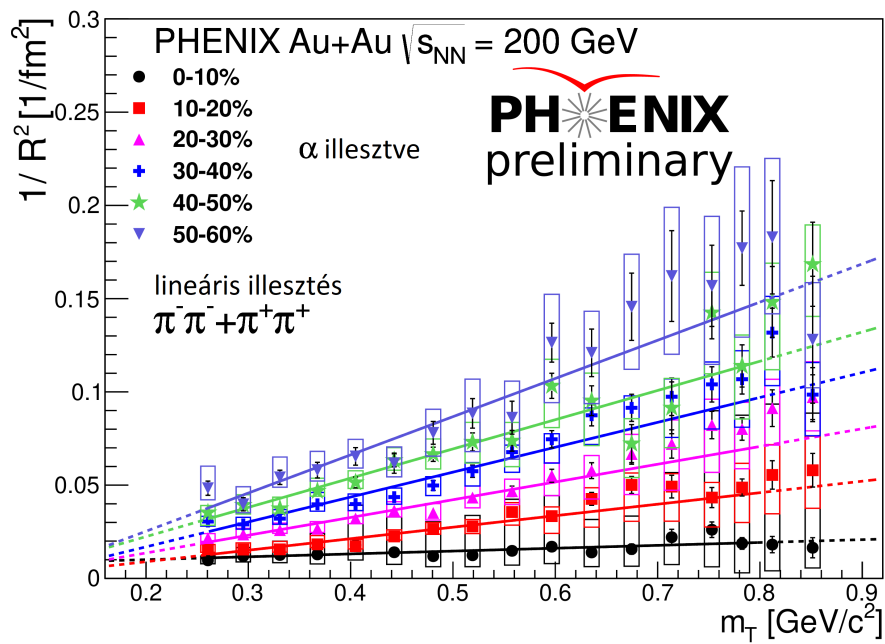
A Gauss-esetben a skálaparaméter a forrás méretét jellemezte, amit alátámasztott az inverz négyzetének  $1/R^2(m_T) = A + B \cdot m_T$  jellegű lineáris skálázása [58, 79, 80]. A Lévy-esetben a skálaparaméter koncepcionálisan különbözik a gaussi szélességtől, azonban Lévy esetben is érdemes lehet a fenti skálázást megvizsgálni. A geometriai értelmezést és az  $A$  és  $B$  paraméterek centralitásfüggését a 9. fejezetben még részletesebb vizsgálatom, de a 42. ábrán látható, hogy a Lévy skálaparaméter  $m_T$  függése nagyon hasonló ahhoz, amit korábbi munkák a Gauss-esetben kimutattak. A centralitás szerinti rendeződés és a trendek nem mondanak ellent az  $R$  paraméter geometriai interpretációjának, a mérettel való kapcsolatának, s további megerősítést jelent az  $1/R^2(m_T)$  ábrázolása is, melyet a 43. ábrán láthatunk. Az illesztett lineáris függvény szinte a teljes  $m_T$  tartományon jól közelíti az adatokat. A lineáris illesztésekből kapott paraméterek kvalitatíve a gaussi esethez hasonlóak: a tengelymetszetek közelítőleg azonosak, a meredekségek a centralitásoknak megfelelő módon rendeződnek. A részletesebb analízis a 9. fejezetben található. Az eredmények szerint tehát az  $R$  paraméter a forrás méretével állhat kapcsolatban, amely feltevést további vizsgálatokkal lehet megerősíteni, melyek közül egyet a következő fejezetben mutatok be.

#### 8.5. A paraméterek korrelációja és az $\hat{R}$ skálaparaméter

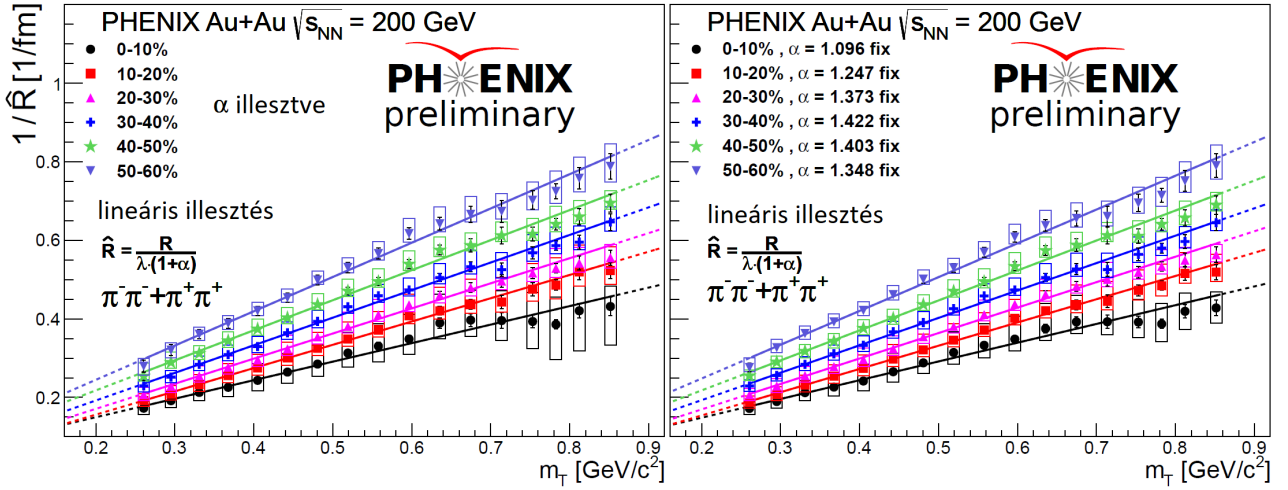
A paraméterek trendjeit összehasonlítva sejthető, az illesztések korrelációs mátrixait megvizsgálva pedig kijelenthető, hogy a Lévy-paraméterek erősen korreláltak. Ha  $\chi^2$  értékeket két



42. ábra. Az  $R(m_T)$  a Gauss-esethez hasonló, amely megerősítheti, hogy a forrás méretével áll kapcsolatban.



43. ábra. Az  $1/R^2(m_T)$  lineáris viselkedést mutat a Gauss-esetben, s ez a Lévy-esetben is megmarad.



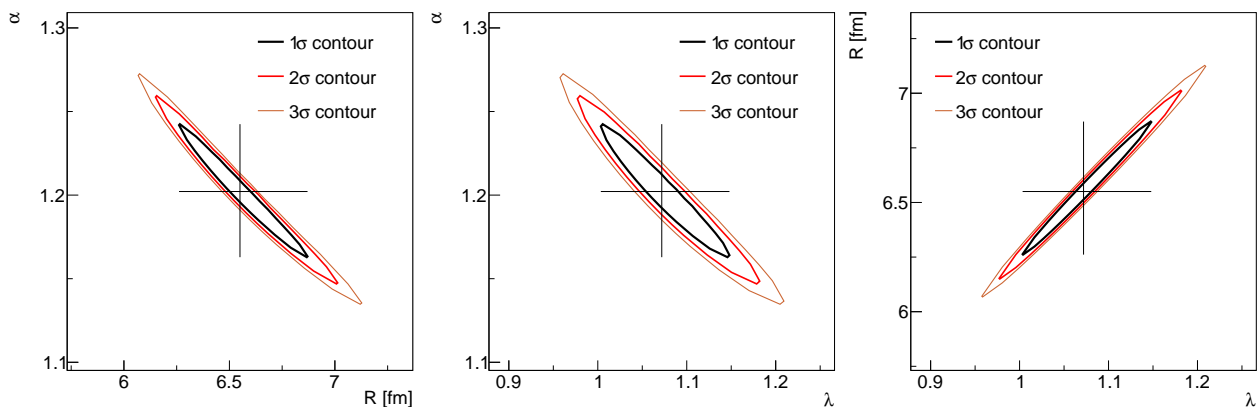
44. ábra. Az  $1/\hat{R}$  lineárisan skálázik az  $m_T$ -vel. Érdekessége, hogy míg a többi paraméter esetén a szisztematikus hibák redukálódtak az  $\alpha$  rögzítésekor, erre az  $1/\hat{R}$  nem érzékeny.

paraméter függvényeként ábrázoljuk, míg a többi paramétert illesztjük és a azt tapasztaljuk, hogy a hibakontúrok a minimumnak megfelelő paraméterértékek által meghatározott pont körül nagyjából kör alakúak, egyenletesen helyezkednek el, akkor az azt jelzi, hogy a paraméterek gyengén korreláltak, nagyjából függetlenül változnak. Ha azonban ferde ellipszisek a kontúrok, akkor az a paraméterek korrelációjára utal. A 45. ábrán láthatók az 1, 2, 3  $\sigma$  kontúrok a minimum körül. Az ellipszisek ferdesége azt jelzi, hogy a paraméterek erősen korreláltak. Ilyen esetekben érdemes megvizsgálni, hogy található-e olyan paraméterkombináció, ami ezt a paraméterek közötti korrelációt gyengíti. Statisztikai adatanalízisből ismert a főkomponens analízis (PCA, principal component analysis) módszere, mely a kovariancia mátrix főtengely transzformáltjának segítségével megmutatja, hogy hány erős és hány gyenge módus, s végső soron hány valódi paraméter van. Ha erős a korreláció a paraméterek között, akkor lehet, hogy az egyik paraméter redundáns, azaz nem független, s így valamilyen módon kizárható. Mivel a PCA módszer mindig a paraméterek valamilyen lineáris kombinációját adja, nem használható fel közvetlenül, de segíthet megsejteni paraméterkombinációkat. A 0-30%-os esetben találtunk egy ilyen kombinációt, amit  $\hat{R}$ -nak neveztünk el, s a

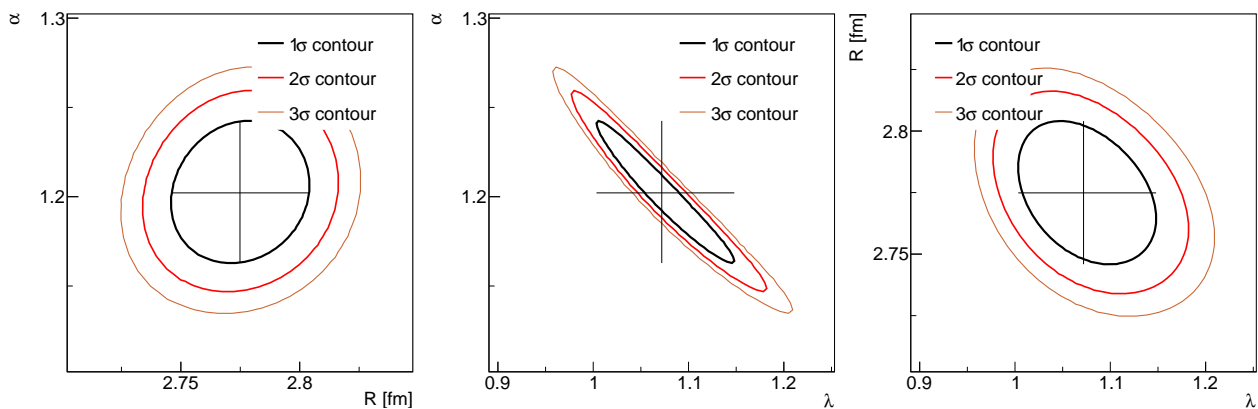
$$\hat{R} = \frac{R}{\lambda(1+\alpha)} \quad (206)$$

alakban írható fel. Ezt a paramétert bevezetve a paraméterek közötti korrelációk csökkenthetőek. Erről ugyancsak a  $\chi^2$  térképek vizsgálatával győződhetünk meg. A 46. ábrán látható, hogy a korábban elnyújtott ellipszisek a körhöz közeli alakot vesznek fel jelezve, hogy a paraméterek csak gyengén korreláltak.

Az  $\hat{R}$  paraméter érdekes tulajdonsága, hogy az inverze lineárisan skálázik az  $m_T$ -vel, amint az a 44. ábrán is látható. Az is érdekes eredmény, hogy a mért adatpontok és hibáik nem érzékenyek az  $\alpha$  rögzítésére, míg ez más paraméterek esetén az  $m_T$  binről  $m_T$  binre való fluktuációk



45. ábra. A  $\lambda$ , az  $R$  és  $\alpha$  paraméterek  $\chi^2$  térképei a 0-10% centralitásbinben. Az ellipszisek ferdesége a paraméterek közötti korreláció erősségére utal.



46. ábra. A  $\lambda$ , az  $\hat{R}$  és  $\alpha$  paraméterek  $\chi^2$  térképei a 0-10% centralitásbinben. Az ellipszisek kevésbé ferde alakja a paraméterek közötti korreláció gyengülésére utal.

és a szisztematikus hibák nagymértékű csökkenését okozta. Az  $\hat{R}$  esetén a szisztematikus hibák eleve kicsik a többi paraméterhez képest. Érdekes eredmény a lineáris skálázás is, hisz ilyen az  $1/R^2$  esetén láttunk, amely a mérettel volt összefüggésben. Az  $\hat{R}$  paraméter jelentése nem ismert, elméleti jóslat vagy magyarázat sem létezik rá egyelőre.

Míg a linearitás a 0-30%-os esetben majdnem az egész vizsgált  $m_T$  tartományon igaz volt, a centralitásfüggő esetben csak kisebb tartományon igaz, ahogy az a 44. ábrán is látszik. Ez nem meglepő eredmény. A (206) definíciót megvizsgálva látható, hogy a lineáris viselkedés csak akkor lehetne igaz, ha az egész tartományon  $\alpha$  állandó lenne,  $R$  monoton csökkenő,  $\lambda$  pedig monoton növekvő függvény lenne. Az  $R(m_T)$  valóban monoton csökkenő és az  $\alpha(m_T) \approx \alpha_0$  közelítőleg tényleg igaz, de  $\lambda$  nem monoton növekvő függvény, hisz 40. és 41. ábrán látható, hogy  $\lambda$  értéke szaturál. Fizikailag is ezt várjuk, hisz az  $m_T$ -vel folyamatosan növekvő korrelációs erősség képtelenség. A következő fejezetben részletesen elemzem ezt a gondolatmenetet.



## 8.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben bemutattam a mért Lévy paraméterek transzverz tömeg- és centralitásfüggését. Érdekes eredmény, hogy az  $\alpha$  Lévy-index centralitásfüggő, de nem függ erősen az  $m_T$ -től. A korrelációs függvények pontos alakvizsgálatát így el lehet végezni, s a  $\lambda$  és  $\lambda/\lambda_{\max}$  paraméter értékét meg lehet határozni. Az itt bemutatott mérések szerint az alacsony  $m_T$ -s tartományban az elnyomás minden centralitáosztályban jelen van a  $\lambda(m_T)$  függvényben és az elnyomás kvalitatíve nem függ a centralitástól. A eredmények az  $R$  paraméter geometriai interpretációjának nem mondanak ellent, az  $1/R^2(m_T)$  linearitása megerősíteni látszik azt. A paraméterek ugyan erősen korreláltak, de található olyan kombináció, amely ezt kiküszöböli. E kombináció az  $\tilde{R}$  paraméter, mely meglepő linearitást mutat az  $m_T$  függvényeként. E linearitás nem teljesül olyan széles  $m_T$  tartományon, mint a korábbi 0-30%-os centralitású esetben, de ahogy azt a következő fejezetben bemutatom, ezt nem is várhatjuk.

Ezeket az eredményeket a PHENIX együttműködés jóváhagyta, a [114] cikkben közöltem és több konferencián is bemutattam előadás és poszter formájában.

## 9. A centralitásfüggés részletesebb vizsgálata

Az előző fejezetben bemutattam a centralitásfüggő Lévy HBT analízis azon előzetes eredményeit, melyeket a PHENIX együttműködés jóváhagyott és a [114] cikkben publikáltam. Jelen fejezetben az előzetes eredmények óta alkalmazott változásokat mutatom be, illetve újabb, véglegesnek szánt, de még nem publikus eredményeket ismeretek. Az itt közölt nem publikusak, ugyanis a publikációt előkészítő kollaborációs fázisban vannak [127].

### 9.1. Változások az előzetes eredményekhez képest

Az előzetes eredmények fejlesztésének legfőbb iránya a szisztematikus hibák csökkentése és az  $m_T$  függő trendek tisztázása volt. Fontos megjegyezni, hogy az előzetes eredményekhez képest a következtetések nem változtak meg, de az új eredmények fényében világosabbak és jobban alátámasztottak lettek. Azt a néhány lényeges változtatást, amelyet végrehajtottam, ebben a fejezetben részletezem, s az alábbi pontokban foglalom össze:

- A Coulomb-korrekciót a parametrizációval végeztem: a parametrizációt részletesen tárgyaltam a 6. fejezetben, ebben a fejezetben csak röviden megemlítem a legfontosabb előnyeit a numerikus táblázathoz képest.
- A 18  $m_T$  bint 24  $m_T$  binre bővítettem: a szisztematikus hiba csökkenésével és a Coulomb-parametrizáció bevezetésével lehetővé vált több  $m_T$  bin felbontása is úgy, hogy az illesztések elfogadhatóak maradtak és az illesztési paraméterek hibái sem nőttek meg.
- A párvágások és az illesztési tartomány vizsgálata: a 7.6. fejezetben leírt beállításokat az előző két pontbeli változások miatt felül kellett vizsgálni.
- A szisztematikus hiba számolására egy új módszert vezettem be: ebben a fejezetben bemutatok egy olyan módszert, amely a szisztematikus hiba értékét reprezentatívabbá teszi azáltal, hogy figyelembe veszi a statisztikus bizonytalanságot is.

#### 9.1.1. A Coulomb-korrekció

A 6. fejezetben részletesen leírtam, hogy miért van szükség a Coulomb-korrekcióra, és két technikát is tárgyaltam a kísérleti adatanalízisbe való bevezetésére. Az előző fejezetben bemutatott eredményeket a numerikus táblázaton alapuló iteratív illesztési technikával kaptam. Az iteratív illesztésre a táblázat diszkréttségéből fakadó numerikus fluktuációk miatt volt szükség. Az ebben a fejezetben bemutatott eredményeket a parametrizációval kaptam, s így nem volt szükséges az iteratív eljárás alkalmazása.

#### 9.1.2. Az $m_T$ binek száma

Az előzetes eredményekhez képest az új eredmények 24  $m_T$ -ben készültek. Ez azért volt lehetséges, mert a szisztematikus hiba csökkentésével már lehetséges volt 2 töltés  $\times$  24  $m_T$   $\times$  6

Új párvágások	Drift kamra			ToF kelet		ToF nyugat		EM Cal		
	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_0$	$\Delta z_0$	$\Delta\varphi_1$
Alapbeállítás	0,12	8	0,017	0,12	12	0,075	14	0,12	16	0,015
Gyenge drift kamra vágás	0,11	7	0,016	0,12	12	0,075	14	0,12	16	0,015
Erős drift kamra vágás	0,13	9	0,018	0,12	12	0,075	14	0,12	16	0,015
Gyenge PID vágás	0,12	8	0,017	0,11	11	0,070	13	0,11	15	0,013
Erős PID vágás	0,12	8	0,017	0,13	13	0,080	15	0,13	17	0,017

6. táblázat. A párvágások definícióiban használt együtthatók új értékei. A párvágások definícióját nem változtattam meg. A  $\Delta\varphi_0$  és  $\Delta\varphi_1$  mértékegysége radián, a  $\Delta z_0$ -é pedig centiméter.

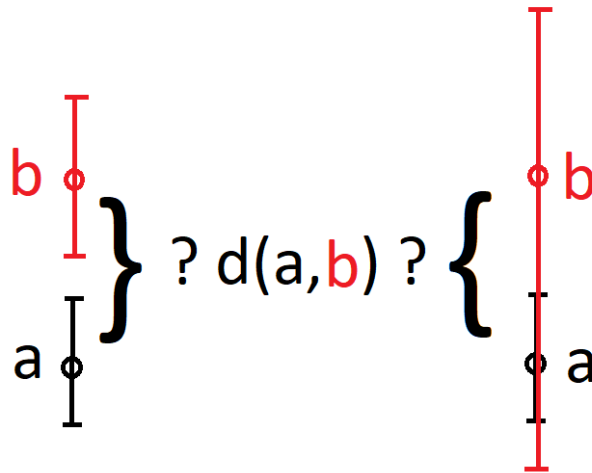
centralitásosztály = 288 illesztést elvégezni úgy, hogy mindegyik eleget tegyen a 7.5. fejezetben megfogalmazott követelményeknek. Az  $m_T$  binek számának növelése nem jelenti azt, hogy szándékosan hibával terhelnénk az adatpontjainkat. Láthattuk, hogy a 0-30%-os esetben az  $\alpha$ -t nem tekinthetjük  $m_T$  függetlennek, míg a 10% széles centralitásbinek mindegyikében az volt. Ugyanez a helyzet a túl széles  $m_T$  tartományokkal is: statisztikailag nem biztos, hogy jó közelítés Lévy-alakú forrást feltételezni tetszőlegesen széles  $m_T$  tartományon, hisz feltettük, hogy a korreláció függvénynek a pár átlagos impulzusától való függése simább, mint az impulzuskülönbségtől való függés. Ezt a 4.7. fejezetben tárgyaltam.

### 9.1.3. A vágások

Az előzetes eredményekhez a korábbi, 0-30%-os centralitás szelekciójú Lévy HBT analízis párvágás és illesztési tartomány értékei megfelelőek voltak, de újabb vizsgálatuk megmutatta, hogy más, kicsit módosított értékekkel stabilabb eredmények érhetőek el. A párvágások esetén több új beállítást tesztelve, empirikusan választottam új értékeket. Ezek az új értékek a 6. táblázatban láthatóak.

A másik vágástípus, amelyet fontos volt megvizsgálni, az illesztési tartomány. Mivel az illesztési tartományt két paraméter határozza meg, a  $Q_{\min}$  és a  $Q_{\max}$ , és a két paraméter hatását egyszerre kell figyelembe venni, olyan illesztéseket végeztem, ahol a két paramétert együtt változtattam. Az illesztésekből meghatároztam azt a  $(Q_{\min}, Q_{\max})$  tartományt, ahol az illesztések a legstabilabbak, azaz a legkisebb érzékenységet mutatják az illesztési tartomány kis megváltoztatásával szemben.

Az illesztési tartományt ilyen módon újra vizsgálva kiderült, hogy saját  $(Q_{\min}, Q_{\max})$  tartományokat érdemes bevezetni a különböző vágások esetén. Erre azért van szükség, mert a vágások lényegesen befolyásolhatják a korrelációs függvény kis  $Q$ -s részét, s ezért az illesztési tartományok sem lehetnek pontosan ugyanazok. A gyakorlatban ez egy-két pont elvételét vagy hozzáadását jelentette az alapértelmezett értékhez.



47. ábra. A szisztematikus hiba becslésekor érdemes figyelembe venni a statisztikus hibát is. Ha nem így járunk el, akkor a bal és a jobb oldali esetre ugyanazt a szisztematikus bizonytalanságot kapjuk, holott a statisztikus bizonytalanságok különbözősége miatt ez nem igaz.

#### 9.1.4. A szisztematikus hibák becslése

A 7.6. fejezetben bemutatottam, hogy hogyan becsülhetjük a szisztematikus hiba értékét a különböző kísérleti beállításokból származó pontok segítségével. A korábbi módszerben azonban nem vettük figyelembe a kapott pontok statisztikus hibáját, pedig néhány esetben ez fontos lehet. A problémát a 47. ábra illusztrálja. Látható, hogy a bal és a jobb oldali esetek között a különbség csupán annyi, hogy a jobb oldali esetben a  $b$  pontnak a statisztikus hibája jóval nagyobb, mint a bal oldali esetben. Az előző fejezetben a szisztematikus hibát a pontok relatív távolságával becsültük. Ha ugyanezt az eljárást alkalmazzuk itt is, akkor a két esetre ugyanazt a szisztematikus hibát becsüljük. A kérdés az, hogy hogyan lehetne a pontok statisztikus hibáját mégis figyelembe venni, hogy a szisztematikus hiba reprezentatívabb legyen.

Tegyük fel, hogy egy adott  $m_T$  és centralitás mellett két mért értékünk van:  $A_{\text{alap}}$  az alapbeállításokkal kapott paraméterérték és  $A_{\text{alt}}$  valamilyen beállítás módosításával kapott alternatív paraméterérték. A két paraméter különbségének bizonytalanságát ekkor a

$$\sigma^2(A_{\text{alap}} - A_{\text{alt}}) = \sigma^2(A_{\text{alap}}) + \sigma^2(A_{\text{alt}}) - 2\text{cov}(A_{\text{alap}}, A_{\text{alt}}) \quad (207)$$

alakban írhatjuk, ahol  $\text{cov}(A_{\text{alap}}, A_{\text{alt}}) = 2\rho\sigma(A_{\text{alap}})\sigma(A_{\text{alt}})$  a kovariancia mátrix. A  $\rho$  mennyiség a paraméterek közötti korrelációs paraméter. Ha értéke  $\rho = 1$ , akkor a paraméterek hibái teljesen korreláltak, míg ha értéke  $\rho = -1$ , akkor teljesen antikorreláltak. E paraméter voltaképpen két, a vágások által létrehozott pár-halmazok közötti „átfedést”, korrelációt jelent. A példa során  $\rho = 1$ -et feltételezünk, a későbbiekben azonban visszatérünk rá.

Azt is tudjuk, hogy teljes bizonytalanság két részből áll, a szisztematikusból és statisztikus-

ból:  $\sigma^2 = \sigma_{\text{sziszt}}^2 + \sigma_{\text{stat}}^2$ , vagyis a következőt írhatjuk

$$\sigma_{\text{sziszt}}^2 = (A_{\text{alap}} - A_{\text{alt}})^2 - \sigma_{\text{stat}}^2(A_{\text{alap}}) - \sigma_{\text{stat}}^2(A_{\text{alt}}) + 2\rho\sigma_{\text{stat}}(A_{\text{def}})\sigma_{\text{stat}}(A_{\text{alt}}). \quad (208)$$

Ebben a formulában, mely a szisztematikus hiba becslésének módját adja meg, a korábbiakhoz képest a kékkel szedett rész tartalmazza az új tagokat, míg a feketével szedett rész a korábbi becslésnek megfelelő tagokat jelenti. Látható, hogy megjelentek a statisztikus hibákat tartalmazó tagok is, s a célunk éppen ez volt.

Lássunk egy szemléletes, de eltúlzott példát az új tagok hatására. Az egyszerűség kedvéért a  $\rho = 1$  választással élek. Ha nem áll módunkban  $\rho$  becslése, akkor ez a legbiztosabb választás, mert így biztosan nem becsüljük alul a hibát. Legyen három mért adatpontunk:  $A_{\text{alap}}$ ,  $A_{\text{alt},1}$ ,  $A_{\text{alt},2}$ . Ezeknek a pontoknak az értékük mellett tudjuk a statisztikus hibáit is:

$$A_{\text{def}} = 1,2 \pm 0,1, \quad (209)$$

$$A_{\text{alt},1} = 2,3 \pm 0,2, \quad (210)$$

$$A_{\text{alt},2} = 2,3 \pm 1,0. \quad (211)$$

Számoljuk ki a szisztematikus hibákat mindkét módszerrel. Korábban a szisztematikus hibát a relatív hibával értelmeztük, ezért itt is így fogom megadni. A korábbi eljárással mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk – dacára a statisztikus hibák nagy különbségének:

$$d_1^2 = (A_{\text{alt},1} - A_{\text{alap}})^2 = (2,3 - 1,2)^2 = 1,21, \quad (212)$$

$$d_2^2 = (A_{\text{alt},2} - A_{\text{alap}})^2 = (2,3 - 1,2)^2 = 1,21, \quad (213)$$

$$\sigma_{\text{sziszt}}^2(A_1) = \frac{d_1^2}{A_{\text{alap}}^2} = \frac{1,21}{1,2^2} = 0,84, \quad (214)$$

$$\sigma_{\text{sziszt}}^2(A_2) = \frac{d_2^2}{A_{\text{alap}}^2} = \frac{1,21}{1,2^2} = 0,84, \quad (215)$$

de ha az új módszer szerint a statisztikus hibákat is figyelembe vesszük, más lesz a helyzet:

$$d_1^2 = (A_{\text{alt},1} - A_{\text{alap}})^2 - \sigma_{\text{stat}}^2(A_{\text{alap}}) - \sigma_{\text{stat}}^2(A_{\text{alt},1}) + 2\rho\sigma_{\text{stat}}(A_{\text{alap}}) \cdot \sigma_{\text{stat}}(A_{\text{alt},1}), \quad (216)$$

$$= (2,3 - 1,2)^2 - 0,1^2 - 0,2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 1,2, \quad (217)$$

$$d_2^2 = (A_{\text{alt},2} - A_{\text{alap}})^2 - \sigma_{\text{stat}}^2(A_{\text{alap}}) - \sigma_{\text{stat}}^2(A_{\text{alt},2}) + 2\rho\sigma_{\text{stat}}(A_{\text{alap}}) \cdot \sigma_{\text{stat}}(A_{\text{alt},2}), \quad (218)$$

$$= (2,3 - 1,2)^2 - 0,1^2 - 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 1 = 0,4, \quad (219)$$

$$\sigma_{\text{sziszt}}^2(A_1) = \frac{d_1^2}{A_{\text{alap}}^2} = \frac{1,2}{1,2^2} = 0,83, \quad (220)$$

$$\sigma_{\text{sziszt}}^2(A_2) = \frac{d_2^2}{A_{\text{alap}}^2} = \frac{0,4}{1,2^2} = 0,28. \quad (221)$$

A példa értelme, hogy megmutassa a statisztikus hiba szerepét a szisztematikus hiba becslésében. A példa természetesen eltúlozza és felnagyítja a hatást, de érzékelteti az új módszer fontosságát. Az egyetlen különbség a két alternatív beállítás vagy vágás között a statisztikus

hibákban volt. A korábbi módszer ezt nem veszi figyelembe és egyforma szisztematikus hibát becsül mindkét esetben ( $\sigma_{\text{sys}}^2(A_1) = \sigma_{\text{sys}}^2(A_2) = 0,84$ ). De az új módszer érzékeny a statisztikus bizonytalanságra és nagyon különböző eredményeket ad a szisztematikus bizonytalanságra ( $\sigma_{\text{sys}}^2(A_1) = 0,83$ , míg  $\sigma_{\text{sys}}^2(A_2) = 0,28$ ).

Érdeemes megjegyezni, hogy a szisztematikus hibát továbbra is a különböző beállításokkal mért pontok relatív eltéréseként értelmezzük. Az itt bemutatott módszer annyiban pontosabb az előző fejezetben bemutatottnál, hogy a mért pontok statisztikus hibáját is figyelembe veszi. Ezáltal megoldja a 47. ábrával szemléltetett problémát.

Szintén fontos látni, hogy míg  $\rho = 1$  feltevessel élünk, azaz az extra tagoknak a lehető legkisebb hatást tulajdonítjuk, addig a módszer független az  $A(Q)$ ,  $B(Q)$  és  $A(Q)/B(Q) = C(Q)$  hisztogramoktól. Az illesztésből kapott, statisztikus hibával rendelkező,  $m_T$  és  $N_{\text{part}}$  függő paraméterek közötti eltérést mérjük.

Fontos hangsúlyozni, hogy az analízis során akkora különbségek a két módszer között, mint a fenti számolásban nem léptek fel, az eltúlzott példa csak a módszerek közötti különbséget hivatott kiemelni, amely a (208) egyenletben bevezetett új tagokkal lép fel.

Hátra van még a  $\rho$  korrelációs paraméter értelmezése. A fenti példában  $\rho = 1$ -et feltételeztünk, csupán az egyszerűség kedvéért, azonban jelen analízisben  $\rho$ -t becsülhetjük az adatokból. Az analízisben a vágás által létrehozott pár-halmazt hasonlítunk az eredeti, alapvágások által létrehozott pár-halmazhoz, s éppen ennek az összehasonlításnak a számszerűsítése adja  $\rho$  értékét. Ha feltesszük, hogy az illesztési paraméterek közötti kovariancia ugyanakkora, mint a beütésszámok közötti kovariancia, akkor utóbbival megkaphatjuk  $\rho$  értékét.

A példa kedvéért tekintsük azt a két pár-halmazt, melynek részecskéit a PHENIX keleti vagy nyugati karja detektálta. A PHENIX detektor két karjának nagy térbeli szeparációja miatt ezek a halmazok diszjunktak, az alap beállítás viszont minkét kart használja. Jelöljük tehát a keleti karban, adott  $m_T$  és centralitásbinben és adott töltéssel detektált részecskék számát  $N_K$ -val, a nyugati karban detektált részecskék számát pedig  $N_{N_y}$ -nyel. Vagyis az összes detektált részecske  $N_{\text{alap}} = N_K + N_{N_y}$ , ami az alapbeállításnak felel meg. A hibák rendre  $\sigma(N_K) = \sqrt{N_K}$  és  $\sigma(N_{N_y}) = \sqrt{N_{N_y}}$ . Mindezekből az  $N_K$  és az  $N_{N_y}$  kovarianciája egyszerűen adódik:

$$\sigma^2(N_K + N_{N_y}) = \sigma^2(N_K) + \sigma^2(N_{N_y}) + 2\text{cov}(N_K, N_{N_y}) \quad (222)$$

$$2\text{cov}(N_K, N_{N_y}) = \sigma^2(N_K, N_{N_y}) - \sigma^2(N_K) - \sigma^2(N_{N_y}) = \quad (223)$$

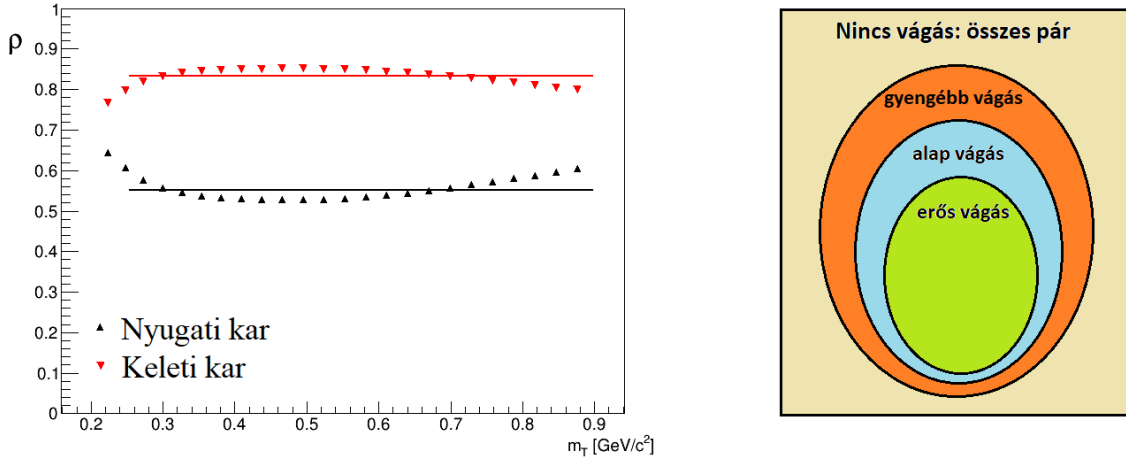
$$= \sigma^2(N_K) + \sigma^2(N_{N_y}) - \sigma^2(N_K) - \sigma^2(N_{N_y}) = 0. \quad (224)$$

Ez azért van így, mert a két minta/halmaz statisztikailag független (köszönhetően a két kar térbeli szeparációjának). De mi a helyzet az  $N_{N_y}$  és az alapbeállítás ( $N_K + N_{N_y}$ ) kovarianciájával?

$$\sigma^2(N_K) = \sigma^2(N_K + N_{N_y} - N_{N_y}) = \quad (225)$$

$$= \sigma^2(N_K + N_{N_y}) + \sigma^2(N_{N_y}) - 2\text{cov}(N_K + N_{N_y}, N_{N_y}) \quad (226)$$

$$2\text{cov}(N_K + N_{N_y}, N_{N_y}) = N_K + N_{N_y} + N_{N_y} - N_K = 2N_{N_y} \quad (227)$$



48. ábra. Balra: a  $\rho$  korrelációs együttható a  $(N_K, N_{\text{alap}})$  és a  $(N_{N_y}, N_{\text{alap}})$  pár-halmazokra, mint az  $m_T$  függvénye. Az analízis során konstanssal közelíttem. Jobbra: a vágások által definiált pár-halmazok illusztrációja. A gyengébb vágás több, míg az erősebb vágás kevesebb párt eredményez az alapbeállításhoz képest.

és ugyanígy az  $N_K$ -ra. Vagyis, felhasználva  $\rho$  definícióját kapjuk, hogy

$$\rho = \frac{N_{N_y}}{\sqrt{(N_K + N_{N_y})N_{N_y}}} = \sqrt{\frac{N_{N_y}}{N_K + N_{N_y}}}. \quad (228)$$

Mivel  $N_K$  és  $N_{N_y}$  mérhetőek,  $\rho$  is mérhető mennyiség. Egy példa látható erre a mérésre a 48. ábra bal oldalán. Ezt az eljárást minden vágásra általánosíthatjuk, amint azt a 48. ábra jobb oldalán látható rajz is szemlélteti.

Mivel  $-1 \leq \rho \leq 1$ , a következőkre jutunk:

$$\rho = \sqrt{\frac{N_{\text{alt}}}{N_{\text{alap}}}} \quad \text{ha} \quad N_{\text{alt}} < N_{\text{alap}} \quad \text{és} \quad \rho = \sqrt{\frac{N_{\text{alap}}}{N_{\text{alt}}}} \quad \text{ha} \quad N_{\text{alap}} < N_{\text{alt}} \quad (229)$$

Így minden vágáshoz egy egyedi, mért  $\rho$  értéket társíthatunk. A jelen analízisben mért  $\rho$  értékeket a 7. táblázatban foglaltam össze. Az értékek a 48. ábrán látható konstans illesztéshez hasonló illesztésekből származnak.

Ezt az új módszert alkalmazva a szisztematikus hibákat pontosabban ismerjük. A korábbi módszer hiányosságát pótolva, nevezetesen figyelembe véve a statisztikus hibát, s a vágások közötti korrelációt nem becsüljük felül a beállításokból eredő bizonytalanságokat. A következő alfejezetben bemutatott eredmények szisztematikus hibáit ezzel az új módszerrel számoltam.

Szisztematikus hibaforrás	$\rho$ gyenge vágás	$\rho$ szigorú vágás
Detektorkar	0,82 (keleti)	0,57 (nyugati)
PID vágások	0,87	0,77
PID detektor matching vágás	0,94	0,89
PC3 matching vágás	0,66	0,6
PID párvágás	1,00	1,00
Drift kamra vágás	1,00	1,00
Illesztési tartomány ( $Q_{\min}$ )	1,00	1,00

7. táblázat. A mért  $\rho$  korrelációs paraméterértékek az összes különböző szisztematikus hibaforrásra. Látható, hogy a mért értékeknek a biztonságosnak vett  $\rho = 1$  érték a legtöbb esetben elfogadható közelítése.

## 9.2. Az új eredmények

Az előző fejezetekben összefoglaltam, hogy mely módszereket és technikai részleteket módosítottam a [114] publikált előzetes eredményekhez képest. Ebben a fejezetben bemutatom, hogy hogyan változtatta meg mindez a korábbi adatokat, illetve új eredményeket is közlök. Ezen eredmények a publikációt előkészítő kollaborációs folyamatban vannak [127].

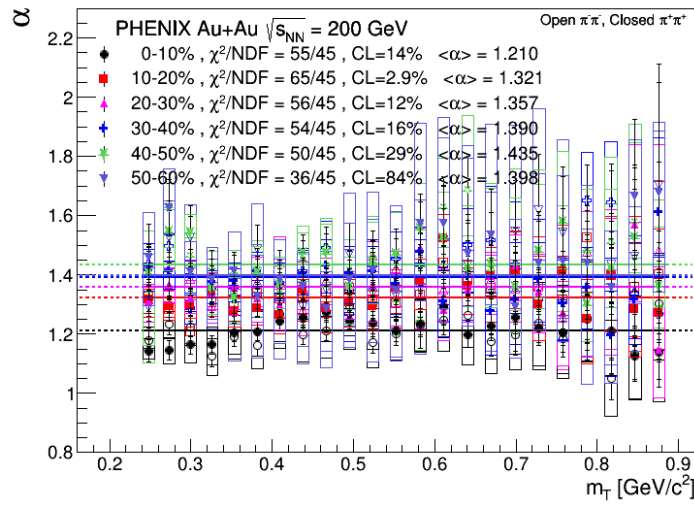
### 9.2.1. A stabilitási index – $\alpha$

Amint azt a 8.2. fejezetben is láthattuk, az  $\alpha$  gyengén függ az  $m_T$ -től és határozott, nem-monoton függést mutatott a centralitástól. Az új eredmények esetén az  $m_T$ -függetlenséget az illesztések jóságának feltüntetésével is megerősítettem. Amint az a 49. ábrán látszik, minden  $\alpha = \alpha_0$  illesztés statisztikailag elfogadható. Az illesztett értékek kicsit megváltoztak a 8.2. fejezetben bemutatott, előzetes eredményekhez képest, de a trend és a nem-monoton centralitásfüggés megmaradt, amint az az 50. ábrán is látható. Mivel az  $\alpha$  nem függ az  $m_T$ -től, jogosan rögzíthetjük az értékét az  $\alpha_0$  konstans értékre az illesztések során, mely érték azonban centralitásfüggő.

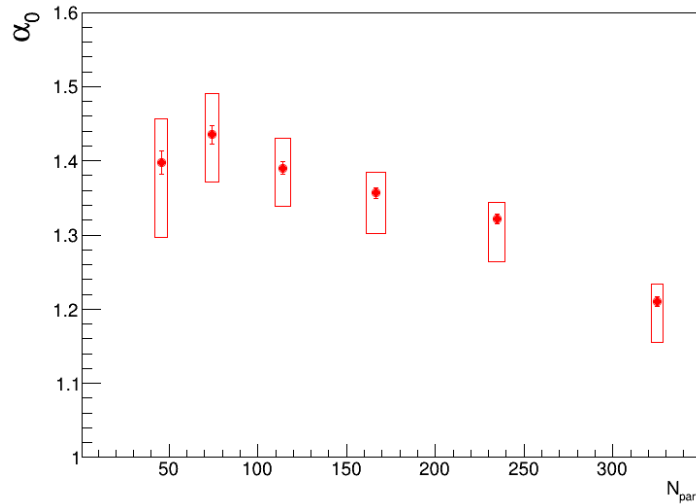
### 9.2.2. A korreláció erőssége – $\lambda$

A korreláció erőssége a kísérleti beállításokra érzékeny paraméter, ami nagy szisztematikus hibákhoz vezetett a 8.3. szakaszban bemutatott eredmények esetén. Az új szisztematikus hibabecslés azt eredményezte, hogy a nagy statisztikus hibával rendelkező pontok kisebb súllyal szerepeljenek, s így a szisztematikus bizonytalanságok csökkentek. Ez jól látszik az 51. ábra bal oldalán. A szisztematikus hibákat tovább csökkenti, ha az előző fejezetben leírtak alapján az  $\alpha$  paramétert rögzítjük az illesztések során. Ennek eredménye látható az 51. ábra jobb oldalán. A szabad és a fix  $\alpha$ -s illesztések eredményén is jól látszik, hogy az alacsony  $m_T$ -s elnyomás megmarad, hasonlóan a 8.3. szakasz eredményeihez. Ahhoz, hogy kvantitatíve tudjuk ezt az elnyomást jellemezni, érdemes a  $\lambda/\lambda_{\max}$  mennyiséget ábrázolni. Szabad és fix  $\alpha$ -s esetben, ez látható az 52. ábrán. Közelítőleg az összes pont egy görbére esik a normálás után. Az elnyomás centralitásfüggését úgy vizsgáltam meg, hogy a szabad  $\alpha$ -s esetben minden centralitás esetén

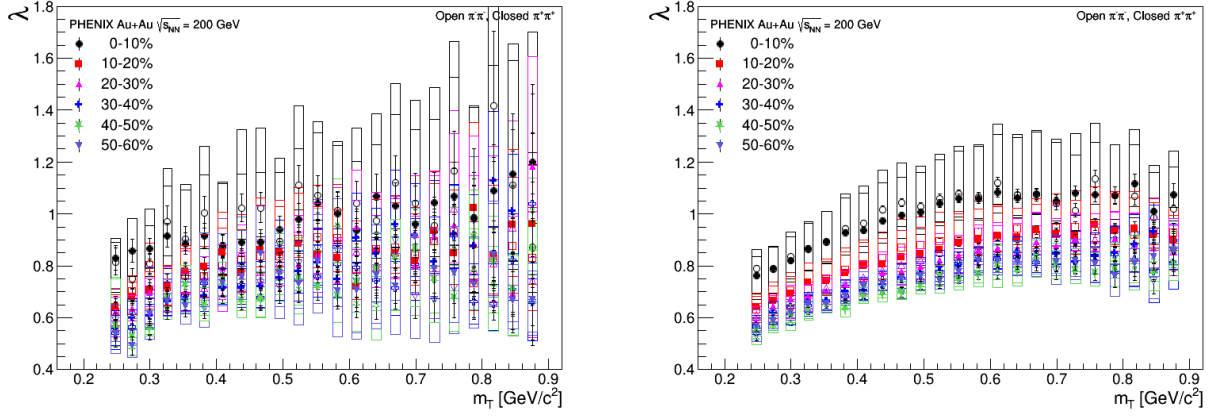




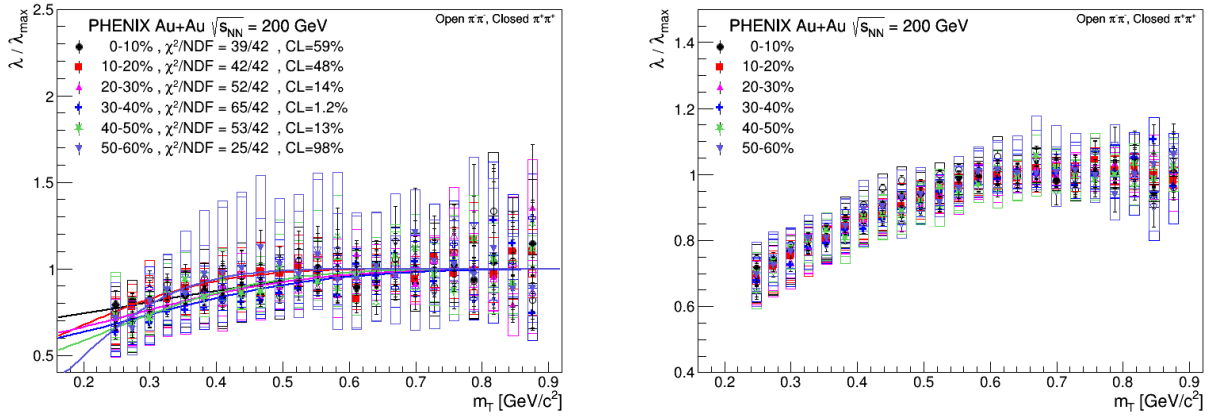
49. ábra. Az  $\alpha$  paraméter  $m_T$  és  $N_{\text{part}}$  függése. Látható a konstans illesztésekből, hogy az  $\alpha$  paraméter nem függ erősen az  $m_T$ -tól, s így minden centralitásban egy adott átlagértékkel jellemezhető, mely átlagértékek azonban nem-monoton módon függenek a centralitástól, ahogy ez az 50. ábrán is látszik.



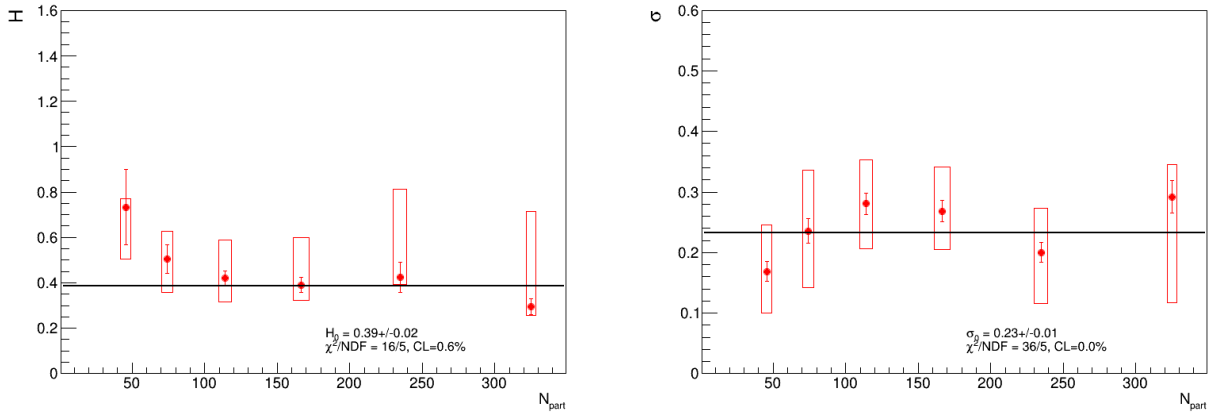
50. ábra. Az  $\alpha_0$  átlagértékek centralitásfüggése. Látható, hogy a nem-monoton trend nem változott az előzetes eredmény óta, ami a 39. ábrán látható.



51. ábra. A korreláció erősségét jellemző  $\lambda$  paraméter kis  $m_T$ -s elnyomása az új eredményekben is jelen van (balra), s a rögzített  $\alpha$  mellett mért eredményekben még határozottabban megfigyelhető.



52. ábra. A normált  $\lambda$  paraméter esetén megfigyelhető a kis  $m_T$ -s elnyomás és annak centralitásfüggetlensége (balra) mely egyértelműbben látható a rögzített  $\alpha$ -s illesztésekből kapott eredményeken (jobbra). Ezt a gyenge vagy nem jelenlévő centralitásfüggést mutatja az 53. ábra is, amely ábrán az elnyomást jelentő „lyuk” jellemzésére szolgáló paramétereket láthatjuk.



53. ábra. A (230) egyenletben definiált parametrizáció paramétereinek centralitásfüggése szisztematikus hibán belül konstans. A  $H$  paraméter statisztikus hibán belül is jól jellemezhető egy állandóval, melynek értéke az ábrán látható. A  $\sigma$  konstanssal való illesztése nem elfogadható konfidenciaszintet ad, mégis szisztematikus hibán belül állandónak tekinthető.

egy

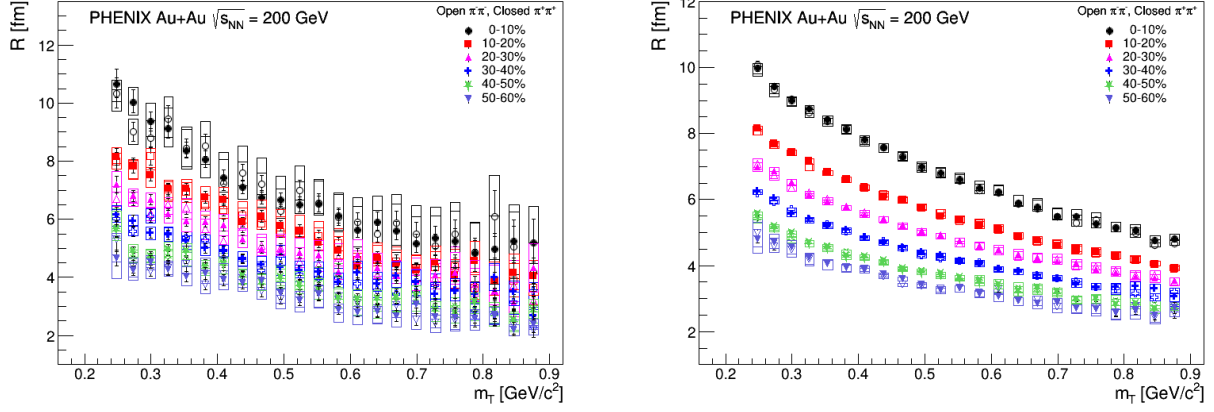
$$\frac{\lambda}{\lambda_{\text{max}}}(m_T) = 1 - H \cdot \exp\left[-\frac{m_T^2}{4\sigma^2}\right] \quad (230)$$

függvény illesztettem az adatpontokra. Ennek a függvénynek két paramétere van, melyek függhetnek a centralitástól:  $H(N_{\text{part}})$  és  $\sigma(N_{\text{part}})$ . Ábrázoljuk is ezeket a paramétereket az  $N_{\text{part}}$  függvényeként, ahogy azt az  $\alpha_0$  esetén tettük; az eredmény az 53. ábrán látható. Látható, hogy szisztematikus hibán belül a konstans illesztés ezekre a paraméterekre elfogadható, csak a statisztikus hibát figyelembe véve, azonban csak a  $H(N_{\text{part}})$  pontok jól jellemezhetőek egy konstans értékkel.

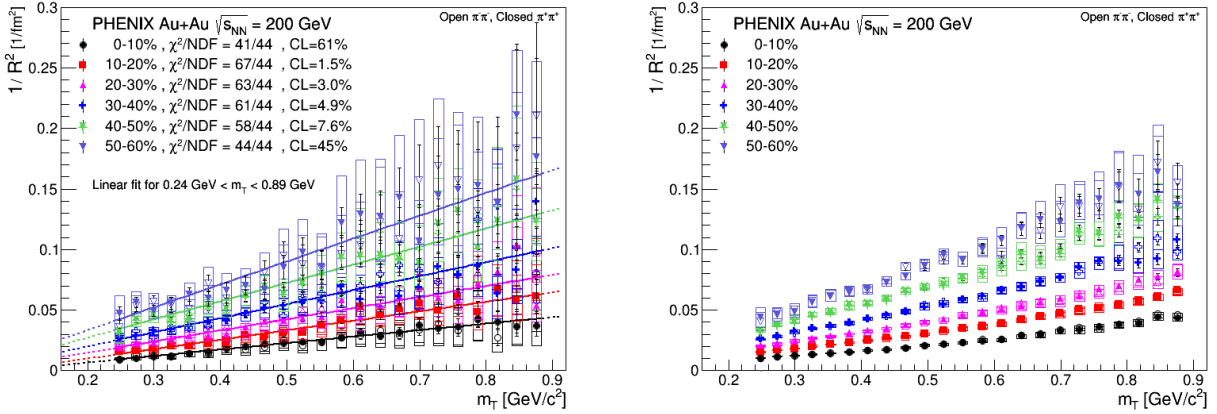
Mindez azt jelenti, hogy a vizsgált energián és rendszerben a  $\lambda$  elnyomás nem függ erősen a centralitástól. Amint azt a 8.1. szakaszban kifejtettem, a pion lézer modell [124] jósl centralitásfüggést, vagyis a modellt nem támasztják alá az adatok.

### 9.2.3. A Lévy skálaparaméter – $R$

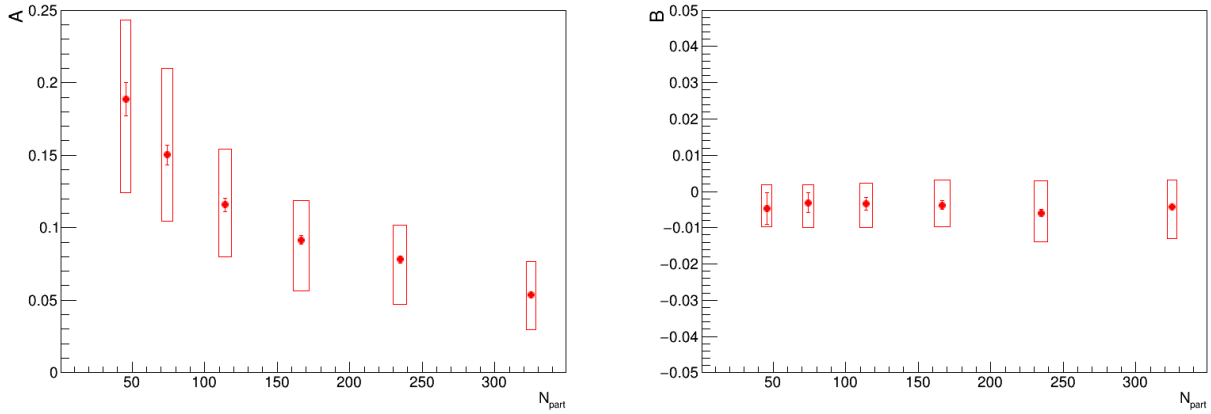
A korábbi eredmények, melyeket a 8.4. szakaszban mutattam be, alátámasztani látszottak az  $R$  Lévy-skála paraméter geometriai jelentését. Az új eredmények részletesebb vizsgálatot tettek lehetővé. Amint az az 54. ábrán is látszik, az  $R(m_T)$  pontok trendje és centralitás szerinti rendeződése nem változott meg, a szisztematikus hibák azonban kisebbek lettek, köszönhetően az új becslési eljárásnak. A trendeket a fix  $\alpha$ -s illesztések még egyértelműbbé teszik. Ahogy azt a 8.4. fejezetben kifejtettem, az  $1/R^2(m_T)$  linearitása a Gauss-esetben az  $R$  geometriai interpretációját erősítette meg, ezért érdemes lehet a Lévy esetben is ellenőrizni. Ez látható az 55. ábrán.



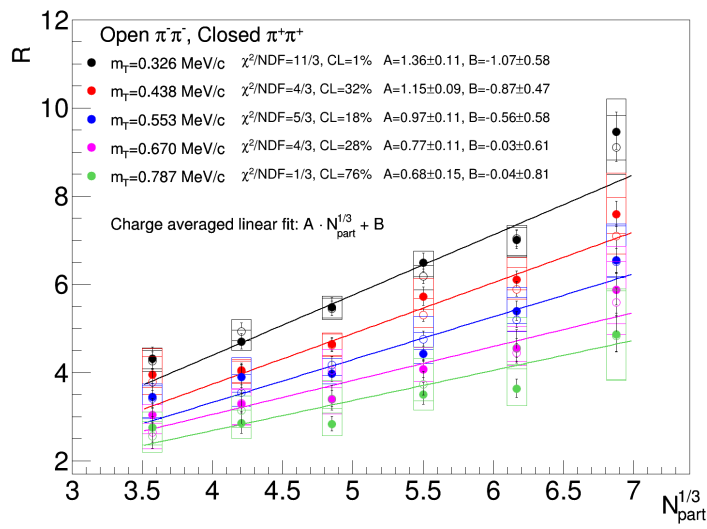
54. ábra. Az  $R$  Lévy skálaparaméter szabad és fix  $\alpha$ -val való illesztés esetén az  $m_T$  függvényeként.



55. ábra. Az  $1/R^2(m_T)$  az egész vizsgált  $m_T$  tartományon jól jellemezhető olyan egyenessel, melynek a tengelymetszeti és a meredekséget jellemző paramétere is függhet a centralitástól. E függéseket az 56. ábra mutatja.



56. ábra. Az  $1/R^2(m_T)$  paraméter lineáris illesztésének paramétereit az  $N_{\text{part}}$  függvényében.



57. ábra. A Lévy-skálaparaméter értéke néhány  $m_T$  esetén az  $N_{\text{part}}^{1/3}$  függvényében. A lineáris illesztések statisztikai értelemben elfogadhatóak.

A linearitás az egész vizsgált  $m_T$  tartományon jól teljesül, amint az a konfidenciaszintekből (CL) is látszik. Érdemes tehát megvizsgálni a lineáris illesztés paramétereinek centralitásfüggését, hisz a Gauss esetben is fizikai jelentést hordoztak. Mivel az illesztések konfidenciaszintje elfogadható, ezek a fizikai tartalmak a Lévy esetben is igazak lehetnek. A meredekség ( $A$ ) és a tengelymetszet ( $B$ ) centralitásfüggése látható az 56. ábrán.

Látható, hogy a meredekség a centralitás szerinti rendeződést mutatja. A  $B$  paraméter, amely a tengelymetszetet jellemzi pedig szisztematikus hibán belül zérus, statisztikus hibán belül pedig ugyanazt a kicsi, de negatív értéket veszi fel minden centralitás esetén. A Gauss-esetben a  $B$  paraméter a forrás kezdeti méretével van összefüggésben, s így az értéke csak tűzgyűrű alakú hidrodinamikai megoldások esetén lehetne negatív, de a Lévy-esetben nem világos ez a kapcsolat.

A Gauss esetben a geometriai interpretációt megerősíti az a tény is, hogy a sugárparaméter (vagy 3 dimenzióban a Bertsch–Pratt sugarak) értékét néhány rögzített  $m_T$  esetén megvizsgálva, lineáris függést mértek az  $N_{\text{part}}^{1/3}$ -tól [54]. Ennek a vizsgálatnak az eredménye az 57. ábrán látható. A linearitás láthatóan jól teljesül, amit az illesztések is megerősítenek.

Összegezve, minden vizsgált függés és eredmény arra mutat, hogy az  $R$  a forrás méretével, geometriájával van összefüggésben, de a pontos kapcsolat nem egyértelmű, amire a  $B$  paraméter negatív volta (az 56. ábra) is felhívja a figyelmet.

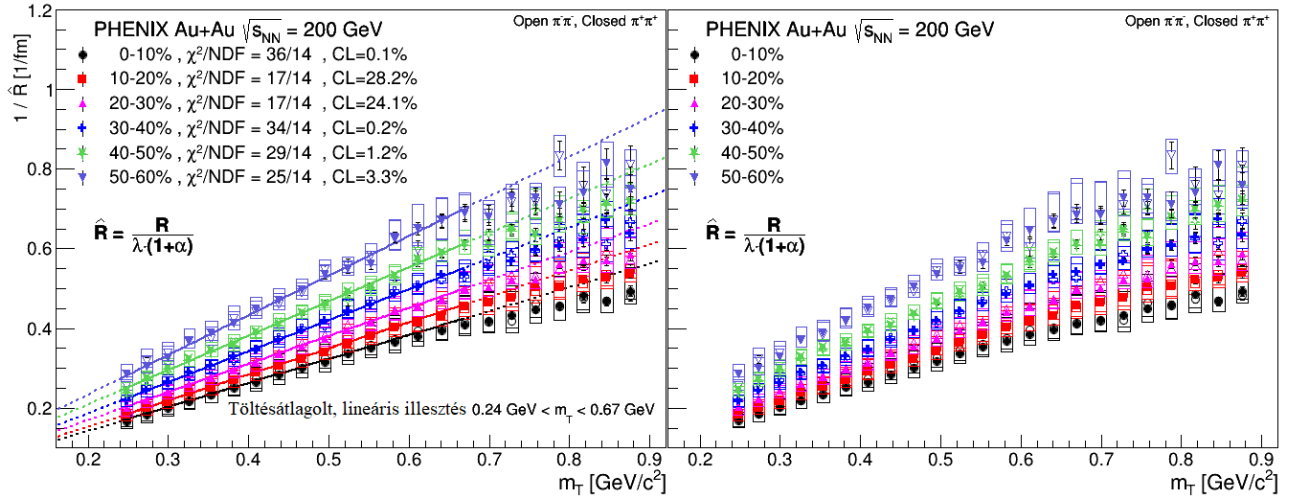
#### 9.2.4. A paraméterek korrelációja és az $\widehat{R}$ skálázó paraméter

A Lévy paraméterek erős korrelációja az új módszerek mellett továbbra is fennáll. Amint azt korábban, a 8.5. szakaszban kifejtettem, ez a korreláció egy megfelelő paraméterkombináció bevezetésével csökkenthető. Egy ilyen kombinációt találtunk az

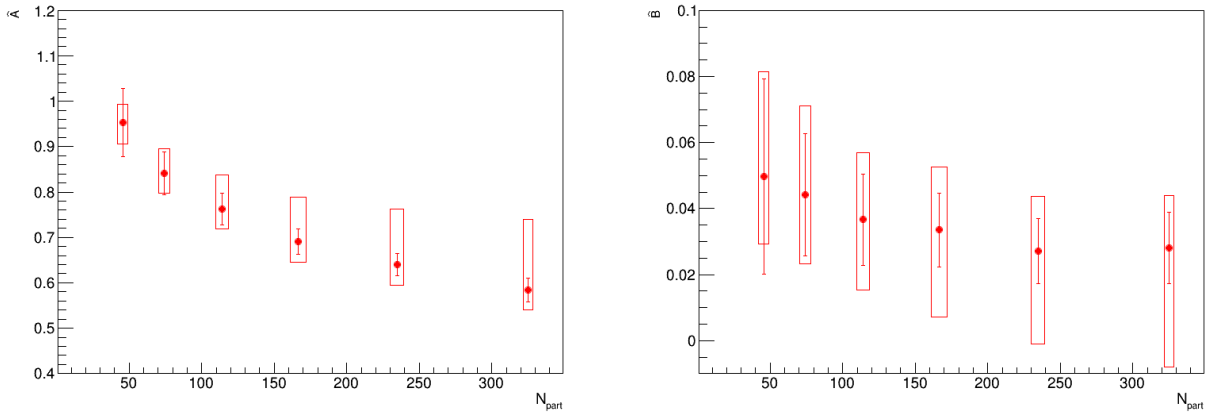
$$\widehat{R} = \frac{R}{\lambda(1 + \alpha)} \quad (231)$$

alakban, melynek inverze meglepően lineáris volt a 0-30%-os esetben az  $m_T$  függvényeként. Az új vizsgálatok kimutatták, hogy ez a skálázás csak szűkebb  $m_T$  tartományon lesz igaz a centralitásfüggő esetben, amint az az 58. ábrán is látszik. Ahogy korábban, az új vizsgálatok során sem volt érzékeny a paraméter az  $\alpha$  rögzítésére. Az 58. ábrán látszik, hogy a lineáris illesztések már csak egy szűkebb  $m_T$  tartományban elfogadhatóak. A lineáris illesztések a  $0.24 \text{ GeV}/c \leq m_T \leq 0.67 \text{ GeV}/c$  intervallumon elfogadhatóak, jól írják le az adatokat, ahogy az a konfidenciaszintekből is látszik. Az illesztések paramétereinek centralitásfüggését megvizsgálva azt látjuk, hogy a meredekségek ( $\widehat{A}$ ) nagyon hasonlóan viselkednek, mint az  $R$  paraméternél, ahogy ez az 59. ábrán is látszik. A tengelymetszetek, hasonlóan az  $R$  paraméternél tapasztalattal, egy centralitásfüggetlen konstans értéket vesznek fel statisztikus hibán belül, ahogy az látszik az 59. ábrán. Érdekes, hogy míg a  $B$  paraméterértékek negatívak voltak, addig a  $\widehat{B}$  paraméterértékek mind pozitívak.

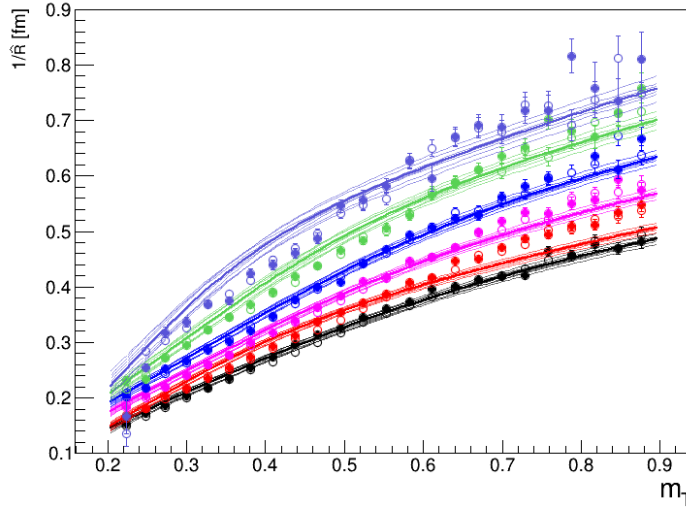
Annak okát, hogy miért csak szűkebb  $m_T$  tartományon érvényes a lineáris közelítés megérthetjük, ha meggondoljuk, hogy a definícióban szereplő paraméterek hogyan függenek az  $m_T$ -tól. Feltettük, és a 49. ábra alapján jogosnak ítéltük, hogy az  $\alpha$  nem függ az  $m_T$ -tól.  $R$ -ről tudjuk, hogy monoton csökkenő függvény, vagyis egy lineáris skálázáshoz  $\lambda$  monoton növekedésére lenne



58. ábra. Az  $1/\hat{R}$  paraméter továbbra is lineárisnak látszik az  $m_T$  függvényeként, azonban a 7.7. fejezetben bemutatott eredményekhez képest már csak szűkebb  $m_T$  intervallumon fogadhatóak el az illesztések. A rögzített  $\alpha$ -s illesztések nagyon hasonlóak a szabad  $\alpha$ -s illesztésekhez, az  $\hat{R}$  paraméter erre nem érzékeny. A lineáris illesztés paramétereit hasonló centralitásfüggést mutatnak, mint az az  $1/R^2(m_T)$  illesztése esetén kaptam, ahogy az az 59. ábrán is látható.



59. ábra. A lineáris illesztés paramétereit nagyon hasonló centralitásfüggést mutatnak, mint amiket az 56. ábrán, az  $1/R^2$  illesztésénél figyelhattunk meg. Lényeges különbség azonban, hogy a tengelymetszeti paraméter itt pozitív konstanssal jellemezhető.



60. ábra. A mért  $1/\widehat{R}$  adatpontok statisztikus hibával, s a (233) egyenletben felírt „elméleti” görbék a különböző centralitások esetén. Az azonos színű, de másként menő görbék azonos centralitáshoz tartoznak, de a halványabbak esetén egy-egy paraméter egy-egy hibaegységnyivel el volt tolva. Hibaterjedés számítása helyett így adom meg az „elméleti” értékek hibáját. Az eredeti értékekkel kapott görbéket kivastagítva, a többi görbét vékonyabb vonallal ábrázoltam.

szükség. Azonban láttuk, hogy  $\lambda$  szaturál  $m_T > 0.6 - 0.7$  GeV/c felett. Ez a szaturáló érték adja a  $\lambda_{\max}$  értékeket. Nem meglepő tehát, hogy a lineáris illesztés ezen  $m_T$  értékek felett már nem jó közelítés. Vizsgáljuk meg az  $1/\widehat{R}(m_T)$  linearitását! Helyettesítjük be a (231) definícióba az

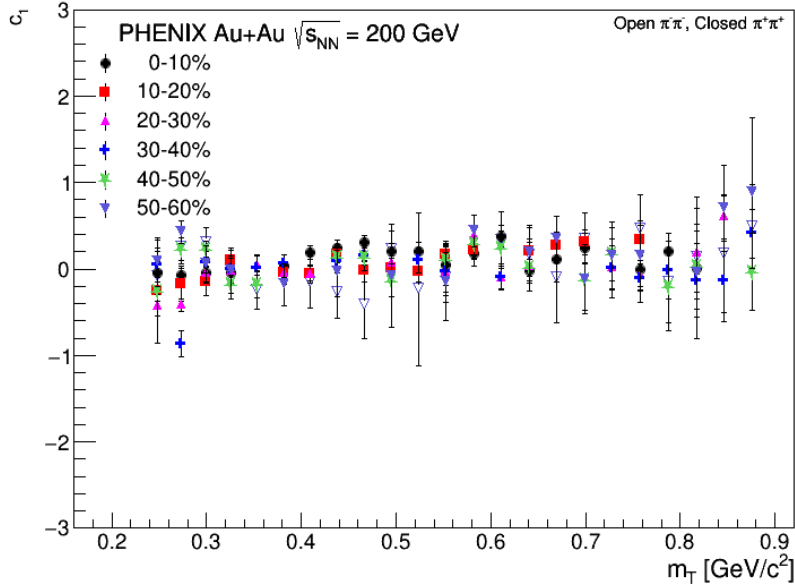
$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2}(m_T) &= A \cdot m_T + B \\ \lambda(m_T) &= \lambda_{\max} \cdot \left(1 - H \cdot \exp\left[-\frac{m_T^2}{4\sigma^2}\right]\right) \\ \alpha(m_T) &= \alpha_0 \end{aligned} \quad (232)$$

paraméterek feltételezett alakjait, s nézzük meg, hogy mi adódik az  $\widehat{R}$ -re:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widehat{R}}(m_T) &= \frac{\lambda(1 + \alpha_0)}{R} = \\ &= \frac{1}{R}(m_T) \cdot \lambda(m_T) \cdot C = \\ &= C' \cdot \sqrt{Am_T + B} \cdot \left(1 - H \exp\left[-\frac{m_T^2}{(2\sigma)^2}\right]\right). \end{aligned} \quad (233)$$

Látható, hogy egy bonyolult kifejezésre jutottunk, amely csak közelítőleg lehet lineáris. A kifejezésben szereplő paraméterek,  $A$ ,  $B$ ,  $H$  és  $\sigma$ , valamint  $C' = (1 + \alpha_0)\lambda_{\max}$  értékei ismertek





61. ábra. A Lévy-sorfejtés első rendű tagjának együtthatója rögzített  $\alpha$  mellett.

minden centralitáosztályban, vagyis a fenti (233) egyenletben szereplő kifejezést a mért pontokra ábrázolhatjuk.

A (233) egyenletben szereplő paraméterek hibáit a következőképpen vettük figyelembe: nem egy görbét ábrázolunk, hanem a paraméterértékek visszahelyettesítésével kapott mellett azokat is, amelyeket úgy kapunk, hogy egy-egy paraméter értékét egy  $\sigma$ -val megváltoztatjuk. Így összesen  $1+5 \times 2=11$  görbét kapunk, amint azt a 60. ábrán láthatjuk. Az eredmények elfogadható egyezést mutatnak az elméletileg jóslott görbék és az adatokból kapott pontok között.

### 9.2.5. Lévy-polinom együttható

A Lévy-sorfejtésnek a 4.6. fejezetben bemutatott módszerével megvizsgáltam minden centralitáosztály esetén, hogy a Lévy-alaktól tapasztalható-e eltérés első rendben. A Lévy-paraméterek önmagukban is erősen korreláltak, egy újabb paraméter bevezetése ezen a helyzeten csak ront. Azonban, amint megmutattam a 9.2.1. fejezetben, az  $\alpha$  paraméter rögzíthető egy centralitásfüggő átlagértékre, így fix  $\alpha$  értékekkel már olyan illesztéseket lehetett végezni, amelyekből adódó  $c_1$  pontok elfogadható statisztikus hibával s egyértelmű trenddel rendelkeznek. Amint az a 61. ábrán is látszik, a  $c_1$  paraméter konzisztensnek tekinthető nullával.

A mérési eredmények alapján tehát a Lévy-alak jó feltételezésnek tekinthető minden centralitáosztályban, s első rendben a Lévy-alaktól való eltérést nem találtam.

### 9.3. Összefoglalás

Ebben a fejezetben bemutattam az új, továbbfejlesztett analízisből kapott eredményeimet, melyek a publikációt előkészítő kollaborációs jóváhagyás fázisában vannak. Látható, hogy az előzetes, publikált eredményekhez képest újdonságot csak az ott nem vizsgált mennyiségek jelentettek, a korábban is vizsgált paraméterek trendjei,  $m_T$  és  $N_{\text{part}}$  függései nem változtak. A szisztematikus hibák, köszönhetően az új becslési eljárásnak és a Coulomb-korrekciónak zárt alakjának csökkentek, így a korábban kimutatott trendek világosabbak lettek.

Az új eredmények esetén is igaz, hogy  $\alpha(m_T, N_{\text{part}}) \approx \langle \alpha(N_{\text{part}}) \rangle_{m_T}$  jó közelítés, s érdemes volt a paraméterek korrelációit csökkenteni azzal, hogy az illesztések során erre a centralitásfüggő átlagértékre rögzítettem  $\alpha$ -t. Ez az eljárás a szisztematikus hibákat tovább csökkentette.

Az  $R$  paraméter geometriai jelentését több vizsgálat is megerősíti, azonban továbbra sem világos, hogy mi a pontos kapcsolat a forrás kezdeti mérete és  $e$  paraméter között. Azonban az elmondható, hogy a szisztematikus hibák csökkentése és főleg a 0-10% centralitáscsoport trendjének egyértelműbbé tétele előremutató eredmény.

A korreláció erősségét jellemző  $\lambda$  paraméter elnyomását pontosabban sikerült megfigyelni, a korábbi eredményekhez képest. Az elnyomást jelentő „lyuk” jellemzésére bevezetett függvény két paraméterének csak gyenge  $N_{\text{part}}$  függését lehetett kimutatni, az egyik paraméter esetén a konstans illesztés elfogadható eredményt ad statisztikus hibán belül. Ez azt jelenti, hogy ha van is az elnyomásnak centralitásfüggése, az igen gyenge.

Megmutattam, hogy a  $c_1$  paraméter elfogadhatóan illeszthető fix  $\alpha$ -s esetben, s értéke minden centralitásbinben konzisztensnek tekinthető nullával. Ez azt jelenti, hogy első rendben nem mutatható ki eltérés a Lévy-alaktól.

## 10. Összefoglaló

Dolgozatom bevezető részében ismertettem a nehézion-fizika tárgykörét, a kvark-gluon plazma felfedezéséhez vezető mérföldköveket. Bemutattam a hidrodinamikai leírás alapjait, áttekintettem a dolgozat szempontjából fontos, ismert hidrodinamikai modelleket, megoldásokat, majd részleteztem egy hidrodinamikai modell általános felépítését. Bevezettem az alapvető mérhető mennyiségeket, külön fejezetben, részletesen tárgyalva a kvantumstatisztikai korrelációs függvényeket, fontosságukat és tulajdonságaikat. Részletesen bevezettem két parametrizációt, a Gauss- és a Lévy-eloszláson alapulót. A Gauss-alakú parametrizáció ismertetése a dolgozatom első felében tárgyalt, általánosított Buda–Lund-modell leírásához volt szükséges. Mivel a PHENIX-nél mért kétrészecske Bose–Einstein-korrelációs függvényekre Lévy-alakból kapott korrelációs függvényeket illesztettem, a Lévy-eloszlással is foglalkoztam. Bemutattam, hogy miért fontos pontosan ismernünk a korrelációs függvény alakját, s ebben a Lévy-alakú korrelációs függvények miért nyújthatnak segítséget. Bemutattam az eloszlás néhány speciális tulajdonságát is, majd áttértem a paramétereinek lehetséges fizikai interpretációjára. Megmutattam, hogyan lehet a Lévy-eloszlásoktól való kis eltéréseket mérni az ún. sorfejtéses technikával.

Ezután rátértem dolgozatom egyik fő részére, a Buda–Lund-modell hidrodinamikai parametrizációra, s annak általánosítására. Áttekintve az ismert elméleti és kísérleti munkákat megmutattam a modell általánosításának szükségességét. Történeti áttekintésként felelevenítettem a nem-relativisztikus és a relativisztikus, gömb és ellipszoidálisan szimmetrikus Buda–Lund-modelleket, majd megadtam az általánosításhoz vezető eljárást. Rámutattam, hogy a modellben két mezőt, a térbeli eloszlást leíró és a sebességmezőt is általánosítani kell, s mindkét esetben ugyanúgy, a transzverz síkban, polár koordinátákkal felírt forrásfüggvényben új szögfüggő tagokat bevezetve lehet ezt megtenni. A két eloszlás aszimmetriáját két külön paraméter jellemzi. A térbeli aszimmetriát jellemző megfigyelhető mennyiségek az azimutális szögtől függő HBT sugarak, a sebesség- vagy impulzustérbeli aszimmetriához jellemző megfigyelhető mennyiségek pedig a folyási koefficiensek. E két mennyiség függ mindkét aszimmetriaparamétertől: a térbeli aszimmetria okoz mérhető azimut HBT sugarakat és folyási koefficiens is, ahogy a sebességtérbeli aszimmetria is. A modell azonban megmutatja, hogyan lehetséges szétválasztani a kétféle hatást és meghatározni az aszimmetriaparaméterek értékeit. Az  $n$ -ed rendű paraméterek értékének meghatározásához az  $n$ -ed rendű folyási koefficiens és az  $n$ -ed rendű azimut HBT sugarak szimultán illesztésére van szükség. Ilyen módon a térbeli és a sebességtérbeli aszimmetriák egyértelműen meghatározhatóak.

A térbeli aszimmetriaparaméter hidrodinamikai megoldásokba való bevezetésére is mutattam példát, amely azonban gömbszimmetrikus Hubble-féle sebességmezőt használt. A Buda–Lund-modell korábbi formái segítettek hidrodinamikai megoldásokat megsejteni, ezért az általánosított modell esetén is megvizsgáltam ennek lehetőségét. Ehhez a skálaparaméter együttmozgó deriváltjának eltűnését kell megkövetelni. Ebből az egyenletből adódik feltétel a szimmetriaparaméterek között. Megmutattam, hogy első rendben egyszerű feltételt kapunk a paraméterek között, míg minden rendet megengedve egy bonyolultabb, de értelmezhető összefüggés adódik.

Dolgozatom második felében a végállapotú Coulomb-korrekción és a centralitásfüggő Lévy-HBT analízisben elért eredményeimet fejtettem ki. A végállapotú Coulomb-kölcsönhatás ke-

zelésére egy új módszert mutattam be, mellyel Lévy-alakú forrás esetén is könnyen kezelhető az effektus. A végállapotban azonos töltésű részecskéket detektálunk, s így közöttük, a detektor felé megtett útjukon fellép az Coulomb-kölcsönhatás. Ezt többen vizsgálták már korábban Gauss-alakú források esetére, de Lévy-forrásra eddig még nem. Mivel a Coulomb-kölcsönhatás figyelembevételére zárt, analitikus formula nem adható Lévy-alakú forrás esetén, bemutattam egy parametrizációt a Coulomb-korrigált korrelációs függvényre, amely a kísérleti adatanalízis során használható.

A PHENIX kísérlet és a részecskeazonosítás tárgyalása után röviden bemutattam a 0-30%-os centralitás szelekcióval készült eredményeket, melyek mutatják, hogy a Lévy-alakú forrás feltevése statisztikailag elfogadható. Ezután a saját kísérleti eredményeimet részleteztem két külön fejezetben: egyrészt bemutattam a PHENIX kísérlet által jóváhagyott, „előzetes” (preliminary) formában publikált adatokat. Megfigyeltem, hogy a Lévy-exponens egyik centralitás esetén sem felel meg egyik speciális esetnek sem, sőt gyengén  $m_T$  függő, de egy  $m_T$  átlagolt értékkel jól jellemezhető. Megfigyeltem, hogy ez az  $m_T$  átlag függ a centralitástól. A  $\lambda$  paraméter, mely a korreláció erősségére jellemző, s több fizikai folyamat is hatással lehet az értékére elnyomást mutat kis  $m_T$  értékeknél, nagy  $m_T$  értékeknél pedig szaturál. Ez a  $\lambda/\lambda_{\max}$  mennyiség  $m_T$  függésén tisztán látszik. A későbbi fejezet részletes analízise megmutatta, hogy az elnyomás mértéke és karakterisztikája nem függ erősen a centralitástól. Az  $R$  skálaparaméter koncepciónálisan különbözik a Gauss-esetben használt szélességtől, mégis hasonló trendeket mutat. Ezt a későbbi fejezetben bemutatott részletes analízis is alátámasztja. A hasonlóság oka a paraméternek a forrással való geometriai kapcsolata lehet. Az újabb, részletesebb eredmények egyelőre a kollaborációs publikálás folyamatában vannak, de a előzetes eredményekhez képest új fizikai megfigyelést nem tartalmaznak, csak pontosabbat. Az új és a régi eredmények közötti technikai és módszertani különbségekkel is részletesen foglalkoztam.

## 11. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Csanád Máténak, aki „kis” TDK-s korom óta türelemmel és kiváló pedagógiai érzéssel kalauzol a nehézion-fizika különböző területein. Nélküle ez a dolgozat sem születhetett volna meg, s talán nem is gondoltam volna egy doktori disszertáció megírására. Köszönet illeti kitartó munkájáért, bátorításáért és a sok-sok segítségért, amit tőle az évek során kaptam.

Szintén köszönöm a segítséget, amit a közeli kollégáktól kaptam, Csörgő Tamástól, Novák Tamástól, Nagy Mártontól és Kincses Dánieltől. Mindig fordulhattam hozzájuk, s mindig szívesen és lelkiismeretesen segítettek.

Külön köszönet jár a külföldi kollégáknak, Wesley Metzgernek és Boris Tomášiknak, akik a dolgozat néhány részében segítettek nagyon sokat és szívesen vendégül láttak Hollandiában és Szlovákiában. (Many special thanks go to the foreign colleagues, Wesley Metzger and Boris Tomášik, who helped a lot in certain part of this thesis and welcomed me as a guest in The Netherlands and in Slovakia).

Köszönöm a türelmet és a támogatást barátaimnak, családomnak, de legfőképpen feleségemnek, akinek a támogatása és szeretete nélkül semmi sem sikerülhetett volna.

## Hivatkozások

- [1] E. V. Shuryak, Phys. Rept. **61**, 71 (1980).
- [2] L. Adamczyk *et al.*, Nature **548**, 62 (2017) [arXiv:1701.06657].
- [3] K. Adcox *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002) [arXiv:nucl-ex/0109003].
- [4] J. Elias *et al.*, Phys. Rev. D **22**, 13 (1980).
- [5] K. Adcox *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3500 (2001).
- [6] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 112303 (2001).
- [7] D. Antreasyan *et al.*, Phys. Rev. D **19**, 764 (1979).
- [8] J. Aubert *et al.*, Physics Letters B **123**, 275 (1983).
- [9] R. Arnold *et al.*, Phys. Rev. Lett. **52**, 727 (1984).
- [10] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003) [arXiv:nucl-ex/0306021].
- [11] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072301 (2003) [arXiv:nucl-ex/0304022].
- [12] D. Kharzeev, E. Levin, and L. McLerran, Phys. Lett. **B561**, 93 (2003) [arXiv:hep-ph/0210332].
- [13] K. Gallmeister, C. Greiner, and Z. Xu, Phys. Rev. **C67**, 044905 (2003) [arXiv:hep-ph/0212295].
- [14] B. Betz, Other thesis, 2009.
- [15] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 182301 (2003) [arXiv:nucl-ex/0305013].
- [16] P. Huovinen *et al.*, Phys. Lett. **B503**, 58 (2001) [arXiv:hep-ph/0101136].
- [17] J. Barrette *et al.*, Phys. Rev. C **55**, 1420 (1997).
- [18] C. Pinkenburg *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1295 (1999).
- [19] H. Appelshäuser *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4136 (1998).
- [20] A. M. Poskanzer *et al.*, Nucl. Phys. **A661**, 341 (1999) [arXiv:nucl-ex/9906013].
- [21] M. Aggarwal *et al.*, Physics Letters B **403**, 390 (1997).
- [22] K. H. Ackermann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 402 (2001).
- [23] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 162301 (2007) [arXiv:nucl-ex/0608033].

- [24] M. Csanád *et al.*, Eur. Phys. J. **A38**, 363 (2008) [arXiv:nucl-th/0512078].
- [25] Csanád, M. and Csörgő, T. and Lacey, R. A. and Lörstad, B., [arXiv:nucl-th/0605044].
- [26] PHENIX Glauber Monte Carlo Calculations, <https://www.phenix.bnl.gov/phenix/WWW/p/draft/reygers/glauber>, [hozzáférés: 2020. április 21.].
- [27] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010) [arXiv:0804.4168].
- [28] D. G. d’Enterria and D. Peressounko, Eur. Phys. J. **C46**, 451 (2006) [arXiv:nucl-th/0503054].
- [29] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 172301 (2007) [arXiv:nucl-ex/0611018].
- [30] H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp, Phys. Rev. **C73**, 034913 (2006) [arXiv:nucl-th/0508055].
- [31] S. Belen’kji and L. Landau, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **3**, 15 10.1007/BF02745507 (1956).
- [32] R. C. Hwa, Phys. Rev. D **10**, 2260 (1974).
- [33] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
- [34] A. Bialas, R. A. Janik, and R. Peschanski, Phys. Rev. C **76**, 054901 (2007).
- [35] T. Csörgő, M. I. Nagy, and M. Csanád, Phys. Lett. **B663**, 306 (2008) [arXiv:nucl-th/0605070].
- [36] T. Csörgő *et al.*, Phys. Rev. **C67**, 034904 (2003) [arXiv:hep-ph/0108067].
- [37] T. Csörgő, L. Csernai, Y. Hama, and T. Kodama, Heavy Ion Phys. **A21**, 73 (2004) [arXiv:nucl-th/0306004].
- [38] S. Akkelin *et al.*, Phys. Lett. B **505**, 64 (2001) [arXiv:hep-ph/0012127].
- [39] T. Csörgő, F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Acta Phys. Hung. **A21**, 53 (2004) [arXiv:hep-ph/0203204].
- [40] Yu. M. Sinyukov and I. A. Karpenko, Acta Phys. Hung. **A25**, 141 (2006) [arXiv:nucl-th/0506002].
- [41] M. I. Nagy and T. Csörgő, Phys. Rev. **C94**, 064906 (2016) [arXiv:1606.09160].
- [42] M. Csanád, M. I. Nagy, Z. F. Jiang, and T. Csörgő, [arXiv:1909.02498].
- [43] M. Csanád, M. I. Nagy, and S. Lökös, Eur. Phys. J. **A48**, 173 (2012) [arXiv:1205.5965].
- [44] S. Borsányi *et al.*, JHEP **1011**, 077 (2010) [arXiv:1007.2580].

- [45] M. Csanád and A. Szabó, Phys. Rev. **C90**, 054911 (2014) [arXiv:1405.3877].
- [46] T. Csörgő, B. Lörstad, and J. Zimányi, Phys. Lett. **B338**, 134 (1994) [arXiv:nucl-th/9408022].
- [47] F. Cooper and G. Frye, Phys. Rev. **D10**, 186 (1974).
- [48] R. H. Brown and R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956).
- [49] D. Dravins, Astrophys. Space Sci. Libr. **351**, 95 (2008) [arXiv:astro-ph/0701220].
- [50] G. Goldhaber *et al.*, Phys. Rev. Lett. **3**, 181 (1959).
- [51] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Lee, and A. Pais, Phys. Rev. **120**, 300 (1960).
- [52] F. B. Yano and S. E. Koonin, Phys. Lett. **78B**, 556 (1978).
- [53] B. Kurgyis, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **12**, 477 (2019).
- [54] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 152302 (2004) [arXiv:nucl-ex/0401003].
- [55] T. Csörgő, Heavy Ion Phys. **15**, 1 (2002) [arXiv:hep-ph/0001233].
- [56] S. V. Akkelin and Yu. M. Sinyukov, Phys. Lett. **B356**, 525 (1995).
- [57] S. V. Akkelin and Yu. M. Sinyukov, Z. Phys. **C72**, 501 (1996).
- [58] S. Chapman, P. Scotto, and U. W. Heinz, Phys. Rev. Lett. **74**, 4400 (1995) [arXiv:hep-ph/9408207].
- [59] S. Chapman, P. Scotto, and U. W. Heinz, Acta Phys. Hung. **A1**, 1 (1995) [arXiv:hep-ph/9409349].
- [60] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. C **97**, 064911 (2018).
- [61] T. Csörgő, S. Hegyi, and W. A. Zajc, Eur. Phys. J. **C36**, 67 (2004) [arXiv:nucl-th/0310042].
- [62] T. Csörgő, S. Hegyi, T. Novák, and W. A. Zajc, AIP Conf. Proc. **828**, 525 (2006) [arXiv:nucl-th/0512060].
- [63] T. Csörgő, S. Hegyi, T. Novák, and W. Zajc, Acta Phys. Polon. B **36**, 329 (2005) [arXiv:hep-ph/0412243].
- [64] M. Csanád, T. Csörgő, and M. Nagy, Braz. J. Phys. **37**, 1002 (2007) [arXiv:hep-ph/0702032].
- [65] R. Metzler and J. Klafter, Physics Reports **339**, 1 (2000).
- [66] A. Bialas, Acta Phys. Polon. **B23**, 561 (1992).



- [67] J. Cimermaň, C. Plumberg, and B. Tomášik, [arXiv:1909.07998].
- [68] J. Cimerman, B. Tomášik, and C. Plumberg, [arXiv:1909.00278].
- [69] B. Tomášik and J. Cimerman, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **12**, 229 (2019).
- [70] T. J. Humanic, Int. J. Mod. Phys. **E15**, 197 (2006) [arXiv:nucl-th/0510049].
- [71] J. P. Nolan, An overview of multivariate stable distributions, 1996, hozzáférés: 2020. április. 20.
- [72] T. Csörgő, R. Vértesi, and J. Sziklai, Phys. Rev. Lett. **105**, 182301 (2010).
- [73] T. Csörgő, R. Vértesi, and J. Sziklai, [arXiv:1012.5058].
- [74] R. Vértesi, T. Csörgő, and J. Sziklai, Phys. Rev. **C83**, 054903 (2011) [arXiv:0912.0258].
- [75] J. Bolz *et al.*, Phys. Rev. **D47**, 3860 (1993).
- [76] R. Weiner, Physics Reports **327**, 249 (2000).
- [77] J. I. Kapusta, D. Kharzeev, and L. D. McLerran, Phys. Rev. **D53**, 5028 (1996) [arXiv:hep-ph/9507343].
- [78] S. E. Vance, T. Csörgő, and D. Kharzeev, Phys. Rev. Lett. **81**, 2205 (1998) [arXiv:nucl-th/9802074].
- [79] A. N. Makhlin and Y. M. Sinyukov, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **39**, 69 (1988).
- [80] T. Csörgő and B. Lörstad, Phys. Rev. **C54**, 1390 (1996) [arXiv:hep-ph/9509213].
- [81] Kincses Dániel diplomamunkája, [http://csanad.web.elte.hu/phys/diakok/kincses\\_tdk2.pdf](http://csanad.web.elte.hu/phys/diakok/kincses_tdk2.pdf), [hozzáférés: 2020. április 23.].
- [82] M. A. Stephanov, K. Rajagopal, and E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **81**, 4816 (1998) [arXiv:hep-ph/9806219].
- [83] Á. M. Halász *et al.*, Phys. Rev. **D58**, 096007 (1998) [arXiv:hep-ph/9804290].
- [84] H. Rieger, Phys. Rev. B **52**, 6659 (1995).
- [85] S. El-Showk *et al.*, J. Stat. Phys. **157**, 869 (2014) [arXiv:1403.4545].
- [86] Csanád Máté: Quark Matter 2005 előadás, [http://qm2005.kfki.hu/archive/parallel/Csanad/1500\\_csanad\\_qm05.ppt](http://qm2005.kfki.hu/archive/parallel/Csanad/1500_csanad_qm05.ppt), [hozzáférés: 2020. április 19.].
- [87] T. Csörgő, A. T. Szerző, and S. Hegyi, Phys. Lett. **B489**, 15 (2000) [arXiv:hep-ph/9912220].

- [88] W. Kittel, *Acta Phys. Polon.* **B32**, 3927 (2001) [arXiv:hep-ph/0110088].
- [89] T. Novák, T. Csörgő, H. C. Eggers, and M. de Kock, *Acta Phys. Polon. Supp.* **9**, 289 (2016) [arXiv:1604.05513].
- [90] M. A. Lisa, S. Pratt, R. Soltz, and U. Wiedemann, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **55**, 357 (2005) [arXiv:nucl-ex/0505014].
- [91] U. A. Wiedemann and U. W. Heinz, *Phys. Rept.* **319**, 145 (1999) [arXiv:nucl-th/9901094].
- [92] P. Achard *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C71**, 1648 (2011) [arXiv:1105.4788].
- [93] A. M. Sirunyan *et al.*, *Phys. Rev.* **C97**, 064912 (2018) [arXiv:1712.07198].
- [94] S. Chapman, P. Scotto, and U. Heinz, *Acta Physica Hungarica New Series Heavy Ion Physics* **1**, 1 (1995).
- [95] T. Csörgő, B. Lörstad, J. Schmid-Sorensen, and A. Ster, *Eur. Phys. J. C* **9**, 275 (1999) [arXiv:hep-ph/9812422].
- [96] T. Csörgő and B. Lörstad, [arXiv:hep-ph/9901272].
- [97] M. Csanád, T. Csörgő, and B. Lörstad, *Nucl. Phys.* **A742**, 80 (2004) [arXiv:nucl-th/0310040].
- [98] A. Adare *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 222301 (2014) [arXiv:1401.7680].
- [99] C. Aidala *et al.*, *Nature Phys.* **15**, 214 (2019) [arXiv:1805.02973].
- [100] C. Loizides, J. Nagle, and P. Steinberg, [arXiv:1408.2549].
- [101] B. Alver and G. Roland, *Phys. Rev. C* **82**, 039903 (2010).
- [102] A. Adare *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 142301 (2015) [arXiv:1507.06273].
- [103] A. Adare *et al.*, *Phys. Rev.* **C94**, 054910 (2016) [arXiv:1509.07784].
- [104] A. Ster, T. Csörgő, and B. Lörstad, *Nucl. Phys.* **A661**, 419 (1999) [arXiv:hep-ph/9907338].
- [105] T. Csörgő and A. Ster, *Acta Phys. Hung.* **A17**, 295 (2003) [arXiv:nucl-th/0207016].
- [106] M. Csanád, B. Tomášik, and T. Csörgő, *Eur. Phys. J.* **A37**, 111 (2008) [arXiv:0801.4434].
- [107] A. Ster *et al.*, *Eur. Phys. J.* **A47**, 58 (2011) [arXiv:1012.5084].
- [108] B. Tomášik and U. A. Wiedemann, in *Quark Gluon Plasma 3*, edited by R. C. Hwa and X.-N. Wang (World Scientific, Singapore, 2004), pp. 715–777. [arXiv:hep-ph/0210250]
- [109] D. Kincses, M. I. Nagy, and M. Csanád, [arXiv:1912.01381].

- [110] E. O. Alt, T. Csörgő, B. Lörstad, and J. Schmidt-Sorensen, [arXiv:hep-ph/0103019].
- [111] M. G. Bowler, *Physics Letters B* **270**, 69 (1991).
- [112] Yu. Sinyukov *et al.*, *Phys. Lett.* **B432**, 248 (1998).
- [113] M. Biyajima, T. Mizoguchi, T. Osada, and G. Wilk, *Phys. Lett.* **B353**, 340 (1995) [arXiv:hep-ph/9503232].
- [114] S. Lökös, *Universe* **4**, 31 (2018) [arXiv:1801.08827].
- [115] M. Csanád, S. Lökös, and M. Nagy, *Universe* **5**, 133 (2019) [arXiv:1905.09714].
- [116] M. Csanád, S. Lökös, and M. Nagy, *Physics of Particles and Nuclei* **51**, 238 (2020) [arXiv:1910.02231].
- [117] K. Adcox *et al.*, *Nucl. Instrum. Meth.* **A499**, 469 (2003).
- [118] T. L. M. Harrison and S. Ozaki, *Nucl. Instrum. Meth.* **A499**, 235 (2003).
- [119] C. Adler *et al.*, *Nucl. Instrum. Meth.* **A470**, 488 (2001) [arXiv:nucl-ex/0008005].
- [120] D. Kincses, *Universe* **4**, 11 (2018) [arXiv:1711.06891].
- [121] E. Andronov, *Nucl. Phys.* **A982**, 835 (2019) [arXiv:1807.10737].
- [122] Yu. M. Sinyukov and Y. Yu. Tolstykh, *Z. Phys.* **C61**, 593 (1994).
- [123] B. Tomášik, J. Cimerman, and C. Plumberg, *Universe* **5**, 148 (2019).
- [124] S. Pratt, *Phys. Lett.* **B301**, 159 (1993).
- [125] J. Zimányi and T. Csörgő, *Acta Phys. Hung.* **A9**, 241 (1999) [arXiv:hep-ph/9705432].
- [126] T. Csörgő and J. Zimányi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 916 (1998) [arXiv:hep-ph/9705433].
- [127] PPG232 website, <https://www.phenix.bnl.gov/phenix/WWW/p/info/ppg/232/>, [hozzáférés: 2020. április 19.].