1. lokális törvény ⟶ PDE
2. hipotézisek: globális tul. ⟶ peremfeltételek, kezdeti feltételek

lokális függ a globálistól

Riemann, Poincaré, Mach-elv → Einstein 1915

Eötvös 10^{-9} ⟶ ↑

Einstein-féle gravitációelmélet (Ált. rel)

geometrizált gravitációelmélet

1950-es évek vége csillagászati megfigy.: kvazár, röntgen, pulzár

Einstein sztatikus univerzuma „$\Lambda > 0$"

1922 Friedmann homogén, izotróp kozmológiai modell

1929 Hubble $6\cdot 10^6$ ly mért. adatokat $v \sim D$

1935 Robertson – Walker hom. izotróp kozmológia modell

„LFRW"

1948 Gamow ⇝ sugárzási maradvány

1965 mikrohullámú háttérsugárzás 2,7K

szept. 14.

Ált. rel.

①

1. lokális törvény ⟶ PDE

2. hipotézisek: globális tul. ⟶ peremfeltételek, kezdeti feltételek

lokális függ a globálistól

Riemann, Poincaré, Mach-elv → Einstein 1915

Eötvös 10^{-9} ⟶ ↑

Einstein-féle gravitációelmélet (Ált. rel)

geometrizált gravitációelmélet

1950-es évek vége csillagászati megfigy.: kvazár, röntgen, pulzár

Einstein sztatikus univerzuma „$\Lambda > 0$"

1922 Friedmann homogén, izotróp kozmológiai modell

1929 Hubble $6 \cdot 10^6$ ly vizsgált adatokat $v \sim D$

1935 Robertson – Walker hom. izotróp kozmológia modell

„LFRW"

1948 Gamow ⟿ sugárzási maradvány

1965 mikrohullámú háttérsugárzás 2,7 K

Példa: • diszkrét topológia „X ∀ részhalmaza $\in \tau$" túl sok nyílt halmaz van benne Penrose diagram

• indiszkrét topológia $\tau = \{X, \emptyset\}$

• $(\mathbb{R}, \{(a,b)\})$ topológia

• indukált topológia: $\exists (X,\tau)$ top. tér és $A \subset X$ tetsz.
Ekkor igaz, hogy (A, τ_A) top. tér (ind. top)
ahol $\tau_A = \{ U \subset A \mid U = A \cap \mathcal{V}, \mathcal{V} \in \tau \}$

• $\exists (X_1, \tau_1)$ és (X_2, τ_2) top. terek. Ekkor ezek $\overset{\text{top. kus}}{\text{szorzata}}$ $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ páros, melyre $\tau_1 \times \tau_2 = \{ \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \mid \mathcal{V}_1 \in \tau_1, \mathcal{V}_2 \in \tau_2 \}$

Házi feladat: diszkrét és indiszkrét topológiák ellenőrzése ✓

analitikus: $\exists$ a ∞-dik deriváltja a $f(x)$-nek, sőt Taylor-sorba fejthető és az konvergál.

Ekvivalencia relációk

! X halmaz és $\sim$ egy reláció rajta X elemei között.

Def.: $\sim$ ekv. reláció, ha
• $\forall a \in X$-re $a \sim a$ reflexív
• $\forall a, b \in X$-re $a \sim b$ szimmetria
• $\forall a, b, c \in X$-re $a \sim b$ és $b \sim c$ $\Rightarrow a \sim c$
(tranzitivitás) ~~tranzitív~~

T.fh. (X_1, τ_1) és (X_2, τ_2) top. terek. Jelölje $\pi : X_1 \cup X_2 \to X_1 \cup X_2/_\sim$ azt a leképezést, amely a $\sim$ ekv. rel. által indukált $X_1 \cup X_2/_\sim$ hányadostérbe képez.

$X = \{a, \dots\}$ $X/_\sim \ni \{a\} \subset X$ azon elemek halmaza melyek ekvivalensek a-val

$\pi(a) = \{a\}$

$!(X_1 \cup X_2/_\sim, \tau_1 \cup \tau_2/_\sim)$ topologikus tér

$\mathcal{V} \subset X_1 \cup X_2/_\sim \Longleftrightarrow \mathcal{V} \in \tau_1 \cup \tau_2/_\sim$ ha $\pi^{-1}[\mathcal{V}] \in \tau_1 \cup \tau_2$

Ezt a topologikus teret hányados topológiának nevezzük

Topologikus terek leképezései

Def: ! (X, τ) és (Y, S) top. terek, valamint $f : X \to Y$ függvény, akkor az f leképezést folytonosnak nevezzük, ha teljesül, hí, $\forall A \subset Y$ nyílt halmaz őse képe nyílt X ben, azaz
$\forall \mathcal{V} \in S \Rightarrow f^{-1}[\mathcal{V}] = \{x \in X \mid f(x) = \mathcal{V}\} \in \tau$

Def.: Ha f kölcs. egyért. ráképezése X-nek Y-ra továbbá mind f mindpedig f^{-1} folytonos, akkor f leképezést homeomorfizmusnak nevezzük.

Def.: $C \subset X$ halmaz zárt, ha $X - C$ nyílt

Pl: $[a,b]$ zárt $(\mathbb{R}, \{(\cdot,\cdot)\})$ topológiára nézve
($a, b \in \mathbb{R}$)

Pl 2. $\exists$-nek sem nem nyílt, sem nem zárt halmazok pl.: $(a,b]$

Pl. 3. diszkrét topológia $\forall$ ν_x nyílt és zárt egyszerre.

Def: Valamely topológikus teret összefüggőnek nevezzük, ha csak a teljes tér és az üres halmaz nyílt és zárt egyszerre.

Pl.

$X = A \cup B$

! τ indukált top $\{(\ )\}$ $\mathbb{R}$-en ért.

$\emptyset, A \cup B, A, B$ egyszerre nyílt és zárt

Elválaszthatósági ~~axiómák~~ ! (X, τ) top. tér

T_0 a $\vee$ b (vagy) a és b elválaszthatók ha $\exists$ $B_r(a)$ vagy $B_r(b)$ hogy $B_r(a) \not\ni$ ~~...~~ b vagy $B_r(b) \not\ni a$

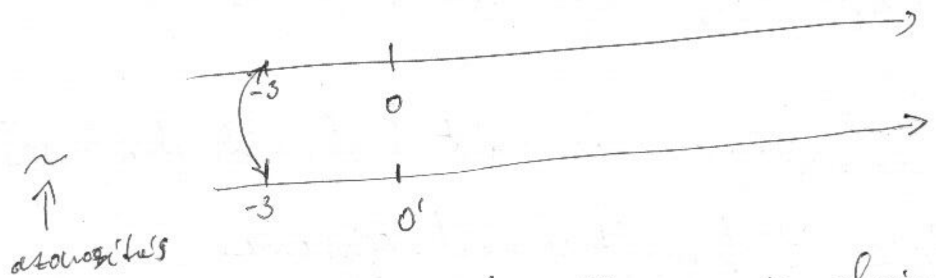
$\forall a, b \in X$-re

T_1 $\wedge$ $\exists$ ~~$B_r(a)$ és $B_r(b) \in \tau$~~ ν_a és $\nu_b \in \tau$ $a \in \nu_a$ és $b \in \nu_a$

T_2 —||— és $\nu_a \cap \nu_b = \emptyset$

Egy top. teret Hausdorff-félének nevezzük, ha T_2 szétválasztható

Pl.: Nem T_2 top. tére



$(\mathbb{R}, \{(\ )\})$

$(\mathbb{R}', \{(\ )\})$

$\forall x, x'$, ha $x, x' < 0$ és $\{x'\} = x \Rightarrow$ ekvivalensek.

– $(\mathbb{R}\cup\mathbb{R}'/\sim, \{(\ ,\ )\}\cup\{(\ ,\ )\}/\sim)$ top. tér nem Hausdorff

Def.: ! Kompakt (X,τ) topológikus tér és $A\subset X$. ~~Azt mondjuk, hogy nyílt halmazok egy rendszere~~ ~~$\{\mathcal{V}_\alpha \mid \forall \alpha\in\tau\}$ nyílt lefedése.~~

~~Amit~~ Az τ-hoz tartozó nyílt halmazok egy rendszere

~~ha~~ $(\mathcal{V}_\alpha \mid \forall\alpha\in\tau)$ nyílt lefedése A-nak ha $A\subset\bigcup_\alpha \mathcal{V}_\alpha$

D.: Az $A\subset X$ halmazt kompaktnak nevezzük, ha $\forall$ nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok nyílt halmaz úgy, hogy azok szintén lefedését adják A-nak, azaz $\exists\ i=1,\dots,n$: $A\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i$ $\quad \mathcal{V}_i\in\{\mathcal{V}_\alpha \mid .\}$ lefedés

Pl. $(a,b]$ nem kompakt. $\mathcal{V}_n = (a+\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n})$. $n\in\mathbb{N}$

$\{\mathcal{V}_n\}$ lefedése $(a,b]\subset\mathbb{R}$

$[a,b]$ kompakt $\subset\mathbb{R}$-ben

Def.: ! (X,τ) top. tér és legyenek $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ és $\{\mathcal{U}_\beta\}$ nyílt lefedései X-nek! A $\{\mathcal{U}_\beta\}$ nyílt lefedés finomításai ~~[illegible]~~ az $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ nyílt lefedésnek, ha $\forall\ \mathcal{U}_{\beta'}$-höz $\exists\ \mathcal{V}_{\alpha'}$: $\mathcal{U}_{\beta'}\subset\mathcal{V}_{\alpha'}$

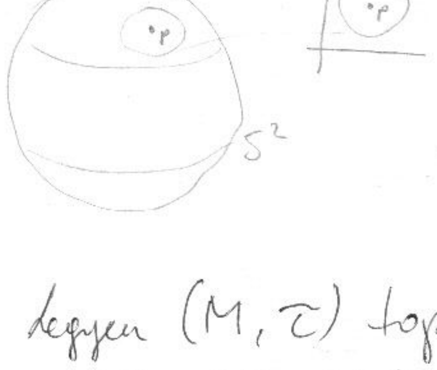
A $\{V_\beta\}$ nyílt lefedést lokálisan végesnek nevezzük, ha $\forall x \in X$ ponthoz $\exists$ W nyílt környezet ($W \in \tau$), melynek csak véges sok V_β beli halmazzal vett metszete nem üres.

Def: Az (X,τ) top. teret parakompaktnak nevezzük, ha X tetsz. $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ nyílt lefedéséhez található valamely $\{V_\beta\}$ lokálisan véges finomítása $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ nyílt lefedésnek.

Differenciálható sokaságok

Ált. rel. előtt: Newton $\mathbb{R}^3$ (tér) és $\mathbb{R}$ (idő); spec. rel. $\mathbb{R}^4$ (téridő) } eseményeket megjelenítő halmaz, adott topológiával rendelkezik.

Ált. rel. $\forall$ eseménynek $\exists$ olyan környezet, mely „homeomorf" $\mathbb{R}^4$ valamely nyílt halmazával.



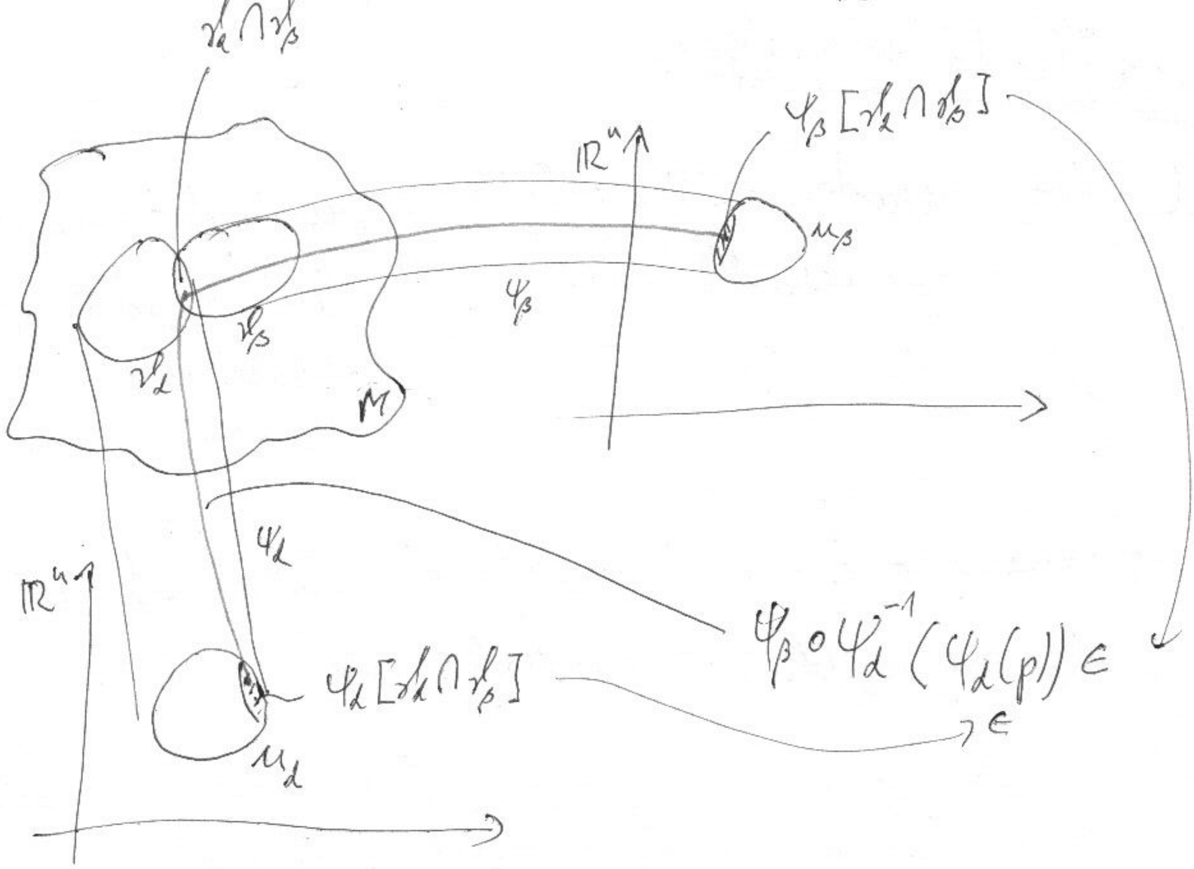
nem igaz a lokális homeomorfizmusra, hogy kiterjeszthető globálissá

Def.: Legyen (M,τ) topologikus tér. Ekkor az M halmazt valós C^r osztályú N dimenziós ($N \in \mathbb{N}$), differenciálható sokaság, ha megadható olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ (rendezett párok halmaza), nyílt halmazokból és leképezésekből álló párok halmaza, melynek elemeire az alábbiak igazak:

1.) Az $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ ~~-ból álló~~ nyílt lefedését adja M-nek, azaz
$M \subset \bigcup_\alpha \mathcal{V}_\alpha$

2.) $\forall\, \alpha$-ra $\mathcal{V}_\alpha$-hoz $\exists$ olyan $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz úgy, hogy
$\varphi_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$ homeomorfizmus $\mathcal{V}_\alpha$ és $\mathcal{U}_\alpha$ között.

3.) Ha valamely α, β-ra $\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta \neq \emptyset$ akkor a
$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \underbrace{\varphi_\alpha[\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta]}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\varphi_\beta[\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta]}_{\mathbb{R}^n}$ leképezés C^v oszt.

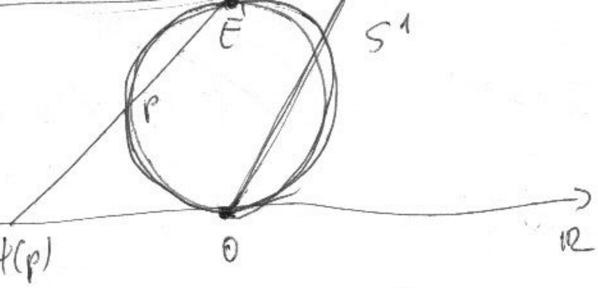


Mat. $(\mathcal{V}_\alpha, \varphi_\alpha)$ térkép, $\{(\,,\,)\}$ atlasz

Fiz. $\mathcal{V}_\alpha$ lok. koord. körny.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koord. trafó

Def.: $\{(\mathcal{V}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ maximális



$\varphi: S^1\setminus\{É\} \to \mathbb{R}$

$\phi: S^1\setminus\{D\} \to \mathbb{R}$

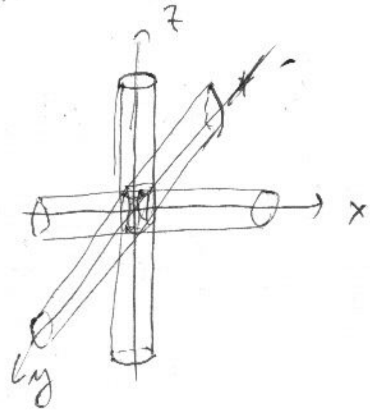
$\{(S^1\setminus É, \varphi), (S^1\setminus D, \phi)\}$ erre nézve a kör diff. sokaság-e?

szept. 28.

4

Megj.:

1) a három henger által kivágott térrészt felületét hozzárendelem minden ponthoz elkület ∄ véges atlasz.

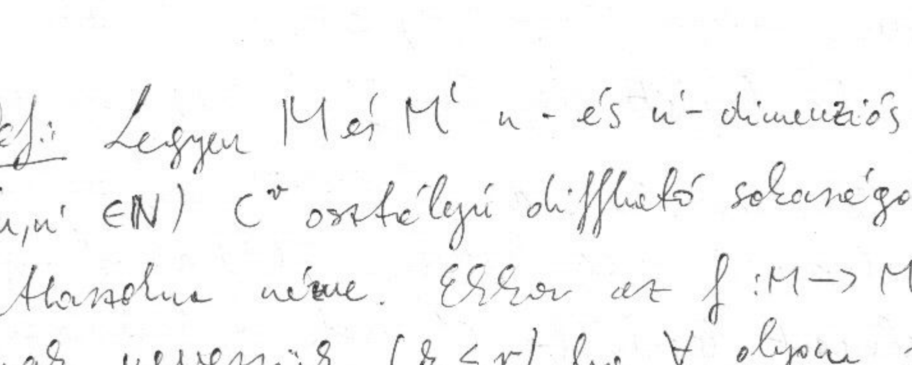


2) $(\mathcal{U}, \varphi)$

$\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \xleftrightarrow{\text{jelöl.}} \mathcal{U}$ lok. koord. φ helyett $(x^1, \dots, x^n)$ lok. koord.

<u>Def.:</u> Legyen M és M' n- és n'-dimenziós diffható sokaságok ($n, n' \in \mathbb{N}$) C^r osztályú diffható sokaságok az $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ és $\{(\mathcal{U}'_\beta, \varphi'_\beta)\}$ atlaszokra nézve. Ekkor az $f: M \to M'$ leképezést C^k osztályúnak nevezzük ($k \le r$), ha $\forall$ olyan $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$ valamint $\tilde{\mathcal{U}}'_\beta \subset \mathcal{U}'_\beta$ halmazok, melyekre $\underbrace{f[\tilde{\mathcal{U}}_\alpha]}_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \text{ képe}} \subset \tilde{\mathcal{U}}'_\beta$ teljesül a

$$\varphi'_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha[\tilde{\mathcal{U}}_\alpha] \subset \mathbb{R}^n \to \varphi'_\beta[\tilde{\mathcal{U}}'_\beta] \subset \mathbb{R}^{n'}$$ legalább C^k-osztályú.



Spec. esetek: 1)

! $M = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ görbe $\quad f: \mathbb{R} \to M'$

$\gamma: x'^{\beta} = x'^{\beta}(t)$

$(x'^1, \ldots, x'^{n'})$ lok. koord.-ban

„C^k-osztályú görbék"

2)

! $M' = \mathbb{R} \quad f: M \to \mathbb{R}$ „C^k-oszt. fv-ek"

Def.: Legyenek M és M' n-dim. C^r osztályú diffható sokaságok, valamint $f: M \to M'$ homeomorfizmus. Ekkor f-et C^r-oszt. diffeomorfizmusnak nevezzük, ha mind f, mind f^{-1} C^r-oszt.

Érintőtér

Def.: Legyenek $(X^1, \ldots, X^n)$ lok. koord. a $p \in M$ pont valamely $\mathcal{U}$ nyílt környezetében. Legyen $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ tetsz., legalább C^1-oszt. görbe $\mathcal{U}$ felett úgy, hogy $p = \gamma(0) \in \mathcal{U}$ és γ-t az $(X^1, \ldots, X^n)$ lok. koord.-ban az $X^{\mu} = X^{\mu}(t)$ ahol $\mu = 1, \ldots, n$ egyenletek segítségével adjuk meg. Jelölje $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$ nyílt környezet fölött értelmezett legalább C^1-oszt. fv. halmazát. Ekkor tetsz. $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ esetén az $X(f) := \left.\frac{d f(\gamma(t))}{dt}\right|_{t_0} \in \mathbb{R}$ valós számot az f fv. γ görbe szerinti p-beli iránymenti deriváltjának nevezzük.

Megj.: Közönséges deriválás tulajdonságait felhasználva belátható, hogy $X: \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ (*)

(1) lineáris, azaz $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$-ra és $a, b \in \mathbb{R}$-re

$$X(af + bg) = a X(f) + b X(g)$$

(2) tiszteletben tartja a Leibnitz-szabályt

$$X(fg) = X(f)\,g + f\,X(g)$$

Értelmezhetjük az $X : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ típ. leképezések összeadását és skalárral való szorzását.

„+" ! $\gamma, \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ legalább C^1-oszt. görbék, melyek $p \in M$ pontban illeszkednek, továbbá $X, Y : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ leképezések a γ és λ görbék menti iránymenti deriváltak. Ekkor az $X + Y : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ leképezés, az amelyre igaz az, hogy $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$-re

$$(X+Y)(f) = \left.\frac{d f(X^\mu_\gamma(t) + X^\mu_\lambda(t))}{dt}\right|_{t=0 \Leftrightarrow p = \gamma(0) = \lambda(0)} \leftarrow \mathbb{R}$$

„$\cdot$" $a \cdot X : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ leképezés az, melyre $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$

$$a \cdot X(f) := \left.\frac{d f(X^\mu_\gamma(at))}{dt}\right|_{t=0}$$

Jelölje $\mathcal{T}(p)$ az $X : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ leképezések halmazát. Belátható, hogy $\mathcal{T}(p)$ az „+" és „$\cdot$" műveletekre nézve valós vektorteret alkot.

<u>Lemma:</u> Legyen $p \in M$ n-dimenziós diffható sokaság tetsz. pontja. Ekkor a p pontbeli $\mathcal{T}(p)$ érintőtér egy valós n-dimenziós vektorteret alkot.

<u>Biz:</u> • $(X^1, \dots, X^n)$ $\mathcal{M}$ halmaz fölött $\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \in \mathcal{T}(p)$ $\forall \mu = 1, \dots, n$

• $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right\}$ $(\mu = 1, \dots, n)$ bázisa $\mathcal{T}(p)$-nek

$$\left.\frac{d f(X^\mu(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_p \left(\frac{d x^\mu(t)}{dt}\right)_{t=0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall X \in \mathcal{T}(p) \\ \text{megadható} \\ \text{a bázisban egy-} \\ \text{ben} \end{array} \right.$$

Legyen $X \in T(p)$ tetsz. $X = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \xi^\mu$ alakban $(\xi^\mu = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n)$

$\exists\, \gamma:\ x^\mu = x_p^\mu + t \cdot \xi^\mu$, hogy X a γ ~~irány~~ görbe menti iránymenti derivált

- $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})\}$ vektorrendszer lin. ftlen.

Tek. az $x^1, \dots, x^n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ fv. $\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) x^\nu = \delta_{\mu\nu}$

$$0 = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \xi^\mu \Rightarrow \xi^\mu = 0 \quad \forall\, \mu = 1, \dots, n$$

Megj.: $!\ \tilde{\gamma}:\ x^\mu = x_p^\mu + t\xi^\mu + t^2 \underbrace{\eta^\mu}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\zeta(\mathcal{O}(t^3))}_{\text{tetsz. fv.-ek}}$

$$\left.\frac{df(x_p^\mu(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df(x_{\tilde{\gamma}}^\mu(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

$\in \mathbb{R} \qquad\qquad \subset \mathbb{R}$

$T(p)$ érintőtér elemei és a p-ben egymást lineáris rendben érintő görbék ekvivalenciaoszt.-i között létezik kölcs. egyért. megfeleltetés.

$\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})\}$ bázist $T(p)$-nek az $(x^1, \dots x^n)$ lok. koord. ~~rendszer~~-hoz tartozó lok. koord. bázisnak nevezzük.

Duális vektorok

Legyen most $\mathcal{T}$ tetsz. n-dim.-s valós vektortér.

Valamely $f: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ leképezést lin. nevezzük, ha $f(aX+bY) = a f(X) + b f(Y)$ $\forall\, X, Y \in \mathcal{T}$ és $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

Tek. $\mathcal{T}$-t $\mathbb{R}$-be képező lin. leképezések halmazát. $\mathcal{T}^* = \{f: \mathcal{T} \to \mathbb{R}\}$

Természetes módon ért. „+", „·" $\mathcal{T}^*$-on, melyekre nézve $\mathcal{T}^*$ vektortérré válik. Ez a duális vektortere $\mathcal{T}$-nek.

Ennek elemei a duális vektorok

Legyen $\{v_\sigma\}$ $(\sigma = 1, \dots, n)$ bázis $\mathcal{T}$-ben tetsz. Ekkor $\mathcal{T}^*$ azon $v^{\lambda *}$ elemeit melyekre teljesül, hogy $v^{\lambda *}(v_\sigma) = \delta^\lambda{}_\sigma$ relációkkal ért., egy $\{v^{\lambda *}\}$ bázisát hat. meg $\mathcal{T}^*$-nak, mely bázist a $\{v_\sigma\}$ bázis duálisának nevezzük.

$\Rightarrow \dim(\mathcal{T}^*) = \dim(\mathcal{T})$

$\Rightarrow \exists\ v_\sigma \leftrightarrow v^{\sigma *}$ kcs. egyért. megfeleltetés $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}^*$ elemei között, mely bázisfüggő izomorfizmusa a két vektortérnek.

U.E. $\mathcal{T}^*$-ból kiindulva kiindulva $\Rightarrow (\mathcal{T}^*)^* = \mathcal{T}^{**}$

$$\mathcal{T}^{**} = \{f: \mathcal{T}^* \to \mathbb{R}\}$$

$\forall\, v^{**} \in \mathcal{T}^{**}$ tetsz. $w^* \in \mathcal{T}^*$

$$v^{**}(w^*) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, v \in \mathcal{T} : w^*(v) = v^{**}(w^*)$$

Kvantumban

- $\mathcal{T} \simeq \mathcal{T}^* \simeq \mathcal{T}^{**}$ a jelen esetben
- $(\mathcal{B}^*)^* \neq \mathcal{B}$
- $\mathcal{H}$: $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \bar{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$ Riesz lemma $\Rightarrow \forall \omega \in \mathcal{H}^*$

  $\exists\, \psi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, \bar{\psi} \rangle : \bar{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$ éppen ω

  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^* \simeq \mathcal{H}^{**}$

Irodalom: General Relativity: Wald

Tenzorok

Ha $\mathcal{T}$ egy n dim valós vektortér, $\mathcal{T}^*$ pedig $\mathcal{T}$ duálisa, akkor a

$$T: \underbrace{\mathcal{T}^*\times\dots\times\mathcal{T}^*}_{k} \times \underbrace{\mathcal{T}\times\dots\times\mathcal{T}}_{l} \longrightarrow \mathbb{R}$$

——, azaz a $\forall$ változója lineáris, leképezést (k,l) – típusú tenzornak nevezzük.

Belátható, h (k,l) – típusú tenzorok az összeadásra és skalárral szorzásra nézve valós vektorteret alkotnak, melyet ezentúl $\mathcal{T}^k_l$ – el jelöljük.

- A $(0,1)$ – típusú tenzorok: $\mathcal{T}: \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \in \mathcal{T}^* = \mathcal{T}^0_1$
- A $(1,0)$ —— " —— : $t: \mathcal{T}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \in \mathcal{T}^{**} = \mathcal{T} = \mathcal{T}^1_0$

Műveletek:

kontrakció: Tekintsük ezen (k,l) típusú tenzorokat $\mathcal{T}^k_l$ tehát amelyekben $k,l \geq 1$

Ekkor az „i-edik" duális és a „j-edik" változóban vett kontrakción azt a

$$C^i_j : \mathcal{T}^k_l \longrightarrow \mathcal{T}^{k-1}_{l-1}$$

leképezést értjük, amely a $T \in \mathcal{T}^k_l$ tenzorhoz azt a $C^i_j T \in \mathcal{T}^{k-1}_{l-1}$ tenzort rendeli, amelyet a

$$C^i_j T = \sum_{k=1}^{n} T(\dots, \overset{i}{v^{*\varepsilon}}, \dots, \overset{j}{v_\varepsilon}, \dots)$$

hozzárendelési szabállyal értelmezzük, ahol $\{v_\alpha\}$ a $\mathcal{T}$ vektortér egy tetszőlegesen választott bázisa, $\{v^{*\beta}\}$ pedig annak duálisát jelöli.

$\boxed{\text{HF.:}}$ Mutassuk meg, hogy $C^i_j T$ független a $\{v_\sigma\}$ bázis megválasztásától.

[Ha $\underbrace{\{v'_\varepsilon\}}_{\text{új bázisra}} = \sum_{\sigma=1}^{n} A_{\varepsilon\sigma} v_\sigma$ lecseréssel ($\det \underline{A} \neq 0$) hatása mik a komponensekben ezeket...]

<u>Tenzori szorzat:</u> Legyenek $T \in \mathcal{T}^k_\ell$, valamint $T' \in \mathcal{T}^{k'}_{\ell'}$ tetszőleges tenzorok. Ekkor a T és T' tenzorok $\otimes$-szorzatát azt a $T \otimes T' \in \mathcal{T}^{k+k'}_{\ell+\ell'}$ típusú tenzort értjük, amelyre

$$T \otimes T' (\omega^{*1}, \dots, \omega^{*(k+k')}; w_1, \dots, w_{\ell+\ell'}) =$$
$$= T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}, w_1, \dots, w_\ell) \cdot T'(\omega^{*k+1}, \dots, \omega^{*k+k'}, w_{\ell+1}, \dots, w_{\ell+\ell'})$$

~~Egy~~ egyenlőség teljesül tetszőleges $\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k+k'} \in \mathcal{T}^*$ és $w_1, \dots, w_{\ell+\ell'} \in \mathcal{T}$ választás esetén

Megj.: látszik:

$$\otimes : \mathcal{T}^k_\ell \times \mathcal{T}^{k'}_{\ell'} \to \mathcal{T}^{k+k'}_{\ell+\ell'}$$

$$\underbrace{(0,1) \quad \tau : \mathcal{T} \to \mathbb{R} \quad , \quad (1,0) \quad t : \mathcal{T}^* \to \mathbb{R}}$$

$$t \otimes \tau \in \mathcal{T}^1_1$$

$\boxed{\text{HF.:}}$ Mutassunk példát olyan $(1,1)$-típ. tenzorra, amely nem áll elő 2 $(0,1)$ és $(1,0)$ típusú tenzori szorzataként

Σ $\{v_\sigma\} \subset \mathcal{T}$ n-dim valós vektortér $(1,0)$ $\mathcal{T}^1_0 \supset \{v_\sigma\}$

$\{v^{*\sigma}\} \subset \mathcal{T}^*$ —— " —— $(0,1)$ $\mathcal{T}^0_1$ $\{v^{*\sigma}\}$

ezen bázisok

ezen tenzorok bázisterét is alkotják.

$\mathcal{T}^k_\ell$ mi a bázis?

$$\underbrace{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k}}_{k} \otimes \underbrace{v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_\ell}}_{\ell}$$

A tenzorok $\otimes$ szorzatának tulajdonságai alapján belátható (SZORGALMI), hogy

az ilyen típusú tenzori szorzatok τ^k_l egy bázisát határozzák meg.

- ? $\dim(\tau^k_l) = n^{k+l}$

- $\exists\, T \in \tau^k_l$ típusú tenzor akkor

$$T = \sum_{\underbrace{\mu=1,\dots,\nu_l}_{k+l}}^{n} \underbrace{T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}$$

formában írhatjuk fel ahol a báziskifejtésben kapott együtthatókat a T tenzor $\{v_\mu\}$ bázisra vonatkozó komponenseinek nevezzük.

- Komponensek segítségével a kontrakció komponensei

$$\left(C^i_j T\right)^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1}} = \sum_{\varepsilon=1}^{n} T^{\overbrace{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \varepsilon \mu_i \dots \mu_{k-1}}^{k}}_{\underbrace{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \varepsilon \nu_j \dots \nu_{l-1}}_{l}}$$

ugrád(?)

$$\left(T \otimes T'\right)^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \cdot T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}}$$

Transzformációs szabályok

$\exists\, p \in M$ $\quad \tau = \tau(p)$ $\quad$ & $\quad \mathcal{O}(\ni p) \subset M$: (p pont nyílt környezete)

$(x^1, \dots x^n)$ lokális koordináták.

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right\} \subset \tau(p)$ bázis. $\exists\, \mathcal{O}'$ olyan nyílt körny.

$\mathcal{O}(\ni p) \Rightarrow \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \neq \emptyset$ $\quad (x'^1, \dots, x'^n)$ lok. koordinátákkal

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)\right\} \subset \tau(p)$ bázis

Az összetett fv.-ek deriválási szabályát felhasználva

beláthatő, $\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \cdot \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\right)}_{*}$ vagy $\frac{\partial}{}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)} \quad **$$

$\forall$ v tetsz. $T(p)$-beli vektor

$$v = \sum_{\sigma=1}^{n} v'^\sigma \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} = \sum v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \& \quad *$$

ez később került ide ↓

$$\boxed{v'^\sigma = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\right)} \qquad \boxed{\omega'_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu \cdot \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)}$$

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right\}$ mi lesz ennek duálisa?

M tetszőleges n dim. ... diff. sokaság.

(így ezen $\exists$ fv.-ek) $\to$ ~~jól~~ definiált a $\mathcal{F}^{r(\geq 1)}(M)$ fv.-ek tere.

Definiáljuk: $\forall f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$ definiáljuk a $df: T(p) \to \mathbb{R}$ leképzést úgy, $df(v) \in \mathbb{R}$ számra $df(v) = v(f)$.

(külső derivált) $v: \mathcal{F}^{(1)}(M) \to \mathbb{R}$ lin. $\Rightarrow df\ T \to \mathbb{R}$ is lin $\Rightarrow$

$\Rightarrow \in T^*$ $\to$ tetsz. M-en értelmezett fv. teljes differenciálja T^*-beli.

Belátható, hogy $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right\}$ bázis duálisa $\{dx^\mu\} < T^*$

$$dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^{\ \mu}$$

Ez $\{dx^\mu\}$ a $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})\}$ bázis duálisa és $\{dx'^\nu\}$ a $\{(\frac{\partial}{\partial x'^\nu})\}$ bázis duálisa. Ez $\omega \in \tau^*(p)$

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \omega'_\nu dx'^\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu dx^\mu \quad \& \quad dx^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} dx'^\nu \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)$$

- τ^* beli elemek ugyan úgy transzformálódnak mint $(**)$ szerint a koordináta bázis elemek $\tau(p)$-ben. Ezért ezeket a vektorokat együtt transzformálódó vagy <u>kovektoroknak</u> szokták nevezni.

- Hasonlóan $\tau(p)$-beli elemeket (fordítva) ellentétesen transzformálódónak vagy <u>kontravariáns</u> vektoroknak nevezzük.

Belátható a tenzori szorzás definícióját felhasználva, h. bármely $T \in \tau^k_l$ komponenseinek transzformációja a

$$\boxed{T'^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \underbrace{\sum_{\alpha_1 \dots \beta_l = 1}^{n}}_{k+l} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\alpha_k}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial x'^{\nu_l}}\right)}$$

Tenzor mezők

<u>Tenzormező</u>: Az M sokaság $\forall$ pontjához hozzárendeljük egy ugyanolyan típusú tenzort.

$T \in \tau^k_l(M)$ (fa-ek tenzorok víz M egy pontjába) spec. esetben

Ha $t \in \mathcal{T}(M) = \mathcal{T}^1_0(M)$ $\quad t : \tilde{\mathcal{F}}^{(\geq \nu)} \to \tilde{\mathcal{E}}^{(\geq \nu-1)}$

$t(f) \in \tilde{\mathcal{E}}^{(\nu-1)}$

Azt mondjuk, h, $t \in \mathcal{T}(M)$ C^k-osztályú ha $\forall$

$f \in \tilde{\mathcal{E}}^{(k+1)}$ (legalább) fib-en felvett értéke C^k-osztályú okt. 12.

1

Ált.rel.

R.M. Wald: General Relativity, Univ. Chicago Press (1984)

$(\mathcal{U},\varphi) \to (x^1,\dots,x^n)$

$(\mathcal{U}',\varphi') \to (x'^1,\dots,x'^n)$

$$T'^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} = \sum_{\alpha_1\dots\beta_l}^{n} T^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l}\left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\right)\dots\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\right)\dots$$

Ha $t \in \mathcal{T}(M)$, (1,0) típusú tenzormező M-en. $t \in C^r(?)$ oszt.

$t \in \mathcal{T}(M)$: $t: \mathcal{F}(x_p) \to \mathbb{R}$: $t(f) = \sum_\alpha t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(x_p)$

$t \in \mathcal{T}(M)$ $t: \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, $t(f): M \to \mathbb{R}$ valós fv. M-en

Def.: A $t \in \mathcal{T}(M)$ vektormezőt C^k oszt. nevezzük, ha tetszőleges $f \in \mathcal{F}^{k+1}(M)$ függvény esetén a $t(f)$ fv. C^k-oszt.

Ha $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$ duális vekt. mező, bármely $t \in \mathcal{T}(M)$ vektormezőre $\omega(t): M \to \mathbb{R}$ valós fv. $\Rightarrow$ értelmezhetjük ω differenciálhatósági osztályát.

Def.: Az $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$ duális vektormezőt C^k oszt. nevezzük, ha tetszőleges legalább C^k oszt. $t \in \mathcal{T}(M)$ vektormezőre az $\omega(t): M \to \mathbb{R}$ fv. C^k oszt.

[Belátható, hogy valamely C^{k+1} oszt. diffható sokaság felett a $t \in \mathcal{T}(M)$ és $\omega \in \mathcal{T}^*(M)$ mezők pontosan akkor C^k osztályúak, ha tetszőleges lokális koord. bázisokhoz tartozó komponenseik C^k oszt.]

Legyen $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$ (k,l) típusú tenzormező M-en, T-t C^k oszt.
nevezzük, ha bármely $\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k} \in \mathcal{T}^*(M)$, $w_1, \dots w_l \in \mathcal{T}(M)$, melyek
legalább C^k oszt. kovariáns és kontravariáns vektormező
esetén a $T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}, w_1, \dots w_l) : M \to \mathbb{R}$ valós fv. C^k oszt.

[Beláthatjuk, hogy a lokális koord. oszt.-hoz tartozó komponensek C^k oszt.-sága ekvivalens a fent meghatározott C^k oszt.-ság fogalmával.]

Az absztrakt index

Legyen $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$ tetsz. (k,l)-típ. tenzormező. A továbbiakban T-t mint általános tenzoriális objektumot $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$-el jelöljük, ahol a kis latin betűs indexek a

$$T(\underbrace{\_,\_,\_}_{k \text{ duális}},\underbrace{\_,\_,\_}_{l})$$

helyeken lévő, különben meg nem nevezett nyílások megjelenítésére szolgál.

Minden konkrét bázisválasztásra vonatkozó indexet továbbra is kis görög betűvel jelöljük:

koord. bázisban: $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ $\qquad \{v_\sigma\} \subset \mathcal{T}(M)$, $\{v^*_\sigma\} \subset \mathcal{T}^*(M)$

Az absztrakt indexeknek bázistól független van értelme.

Legyenek $\underset{(0,1)\text{ típ}}{\omega_a} \in \mathcal{T}^*(M)$ és $\underset{(1,0)\text{ típ.}}{t^a} \in \mathcal{T}(M)$ tetsz. Ekkor ω_a és t^a tenzori

szorzatán ~~dft~~ az $\omega_a t^b \in \mathcal{T}^1{}_1(M)$ tenzormezőt ért. Hasonlóan

$\omega_a t^b$ kontrakciójain az $\underbrace{\omega_e t^e}_{\text{összegzem, ez felel. a kontr.}} : M \to \mathbb{R}$ fv.-t értjük

Pl. $T^{abc}{}_{de} \in \mathcal{T}^3{}_2(M)$, $S^{ij}{}_{klm} \in \mathcal{T}^2{}_3(M)$ akkor ezek tenzori szorz.

$$T^{abc}{}_{de} \cdot S^{ij}{}_{klm} \in \mathcal{T}^5{}_5(M).$$

ált. tenzor, vektor index

Pl. $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$ és $\{v_{(\alpha)}^{\ a}\} \subset \mathcal{T}(M)$ (ennek duálisa $\{v_a^{(\beta)}\} \subset \mathcal{T}^*(M)$)

bázis vekt.-ként hányadik, relé index

kontrakciók

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}\, v_{a_1}^{(\mu_1)} \cdot \ldots \cdot v_{a_k}^{(\mu_k)} \cdot v_{(\nu_1)}^{b_1} \cdot \ldots \cdot v_{(\nu_l)}^{b_l}$$

Tenzorok szimmetriái és antiszimmetriái

Tekintsünk egy tetsz. $T_{ab} \in \mathcal{T}^0{}_2(M)$ tenzormezőt, továbbá legyenek $v^a, w^a \in \mathcal{T}(M)$ tetsz. vekt. mezők. Hasonlítsuk össze a $T_{ab} v^a w^b : M \to \mathbb{R}$ fv.-t a $T_{ab} w^a v^b : M \to \mathbb{R}$ fv.-nyel.

Def.: Azt mondjuk, hogy a $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$ szimmetrikus, ill. anti-szimmetrikus, ha $v^a w^a \in \mathcal{T}(M)$ tetszőleges választása esetén

$$T_{ab} v^a w^b = T_{ab} w^a v^b, \text{ ill. } T_{ab} v^a w^b = -T_{ab} w^a v^b$$

egyenlőség teljesül.

[Beláthatő, hi T_{ab} ⟺ szimmetrikus, antiszimmetrikus, ha $T_{ab} = T_{ba}$, $T_{ab} = -T_{ba}$]

Bármely $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$ hozzárendelhetjük a szimmetrikus és antiszimmetrikus részét

$$T_{(ab)} := \frac{1}{2}\left(T_{ab} + T_{ba}\right) \quad \text{szimmetrikus}$$

$$T_{[ab]} := \frac{1}{2}\left(T_{ab} - T_{ba}\right) \quad \text{antiszimmetrikus}$$

Tehát $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$

[Hf.: Mutassuk meg, hogy $T_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$ pontosan akkor szimm. ill antiszimmetrikus, ha $T_{[ab]} = 0$, ill $T_{(ab)} = 0$]

Egyszerre több azonos típusú indexcsoportban vett szimmetrikus és antiszimmetrikus rész is értelmezhető.

Def.: Legyen $T_{a_1 \dots a_l} \in \mathcal{T}^0_l(M)$. Ekkor $T_{a_1 \dots a_l}$ teljesen szimmetrikus, ill. antiszimmetrikus része a

$$T_{(a_1 \dots a_l)} := \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$$

π: $(1, \dots, l)$ szám l-es $l!$ permutációját jelöli

$$T_{[a_1 \dots a_l]} := \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$$

$$\delta_\pi = \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros permutáció} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ ptlan} \end{cases}$$

Pl. $T^{abc}{}_{de} \in \mathcal{T}^3_2(M)$

$$T^{(ab)c}{}_{[de]} = \frac{1}{2}\left[T^{abc}{}_{[de]} + T^{bac}{}_{[de]}\right] = \frac{1}{4}\left[T^{abc}{}_{de} + T^{bac}{}_{de} - T^{abc}{}_{ed} - T^{bac}{}_{ed}\right]$$

Ált. rel.
ált. 12

Hf.: Legyen $T_{abc} \in \mathcal{T}^0_3(M)$ úgy, hogy a $T_{abc} = -T_{bac}$, azaz $T_{abc} = T_{[ab]c}$. Keressük a $T_{[abc]}$ legegyszerűbb alakját.

Legyen $S^{abcd} \in \mathcal{T}^4_0(M)$ tetsz. Határozzuk meg az $S^{a(b[cd])}$ valamint $S^{a[b(cd)]}$ tenzormezőket.

A metrika

Def.: Azt mondjuk, hogy az $X_{ab}: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{F}(M)$ $(0,2)$ típusú tenzormező degenerált a $p \in M$ pontban, ha $\exists$ olyan nem zérus $v^a \in \mathcal{T}(p)$ úgy, hogy tetsz. $w^a \in \mathcal{T}(p)$ vektor esetén az $X_{ab} v^a w^b = 0$ egyenlőség teljesül.

Def.: A g_{ab} $(0,2)$-típ. szimmetrikus tenzormező metrikát határoz meg M-en, ha sehol sem degenerált.

~~Legyen~~ Legyen $(\mathcal{U}, \varphi)$ egy tetszőleges $(x^1 \ldots x^n)$ lok. koord. hal. Ekkor az $(x^1 \ldots x^n)$ lok. koord.-hoz tartozó $\{(dx^\mu)_a\}$ duális bázis mező segítségével a g_{ab} metrikát $\mathcal{U}$ felett a

$$g_{ab} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} (dx^{\mu})_a (dx^{\nu})_b$$

relációval adhatjuk meg.

Egyszerűsített rel. az ívelem négyzettel: $ds^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$

[$g_{\mu\nu}$ az $(x^1,\dots,x^n)$ lok. koord. rendszerre vonatkozó komponenseknek nev.]

[Belátható, hogy $g_{ab} \Leftrightarrow$ nem degenerált, ha tetsz. $(\mathcal{U}, \varphi)$ a metrika térképhez tartozó komponenseiből képzett $n \times n$ es ~~~~ $g_{\mu\nu}$ mátrixa $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$.]

Inverz metrika

Mivel g_{ab} nem degenerált, belátható, hogy létezik hozzá egyért. en egy olyan $g^{ab} \in \mathcal{T}^2{}_0(M)$:

$$g^{ae} g_{eb} = \delta^a{}_b \in \mathcal{T}^1{}_1(M) \quad \text{ahol } \delta^a{}_b : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

a $\mathcal{T}(M)$ tér önmagára vett identikus leképezése.

Ekkor az így kapott $g^{ab} \in \mathcal{T}^2{}_0(M)$ a g_{ab} metrika inverzének vagy kontravariáns alakjának nevezzük.

Legyen $(\mathcal{U}, \varphi)$ térkép $(x^1,\dots,x^n)$ lok. koord. rel. Ekkor a g^{ab} komponenseire a $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ reláció teljesül

inverz mátrix

<u>A metrika által meghatározott izomorfizmusok</u>

$g_{ab} \in \mathcal{T}^0_2(M)$, szimmetrikus és nem degenerált: $\overset{\forall p \in M}{\vee}$ $g_{ab}: \mathcal{T}(p) \times \mathcal{T}(p) \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow g: \mathcal{T}(p) \to \mathcal{T}^*(p) \quad \forall v^a \in \mathcal{T}(p) \quad \underset{\text{absztrakt indexes jelölésből}}{[g(v)]_a} = g_{ab} v^b$

[Belátható, hogy kölcsönösen egyértelmű leképezés $\Leftarrow$ g_{ab} nem degenerált.]

Hasonlóan, g^{ab} kontravariáns metrika (inv. metrika)

$\forall p \in M$ pontban $\quad g^{-1}: \mathcal{T}^*(p) \to \mathcal{T}(p)$: $\forall \omega \in \mathcal{T}^*(p): [g^{-1}(\omega)]^a :=$
$$\left(g^{ab}\big|_p : \mathcal{T}^*(p) \times \mathcal{T}^*(p) \to \mathbb{R} \right) \qquad := g^{ab}\omega_b$$

☒ g és g^{-1} leképezések bázis ftlen, természetes izomorfizmusok a $\mathcal{T}(p)$ és $\mathcal{T}^*(p)$ terek között.

Mivel az összes tenzor vektorok és ko-vektorok tenzori szorzatainak lineáris kombinációiból épül fel, a g_{ab}, ill g^{ab} metrikák segítségével tetsz. vektor, ill. kovektor index lehúzható, ill. felhúzható.

<u>Pl.:</u> Legyen $T^{abc}{}_{de} \in \mathcal{T}^3_2(M)$. Ekkor az <u>alábbi készített</u> $T^a{}_b{}^{cde} \in \mathcal{T}^4_1(M)$ tenzor mezőn a $T^a{}_b{}^{cde} = g_{be} g^{di} g^{ej} T^{aec}{}_{ij}$

okt. 19.

Ált. rel.

1

g_{ab} szimmetrikus, nem degenerált, $(0,2)$ típ. tenzormező M-en

$(\mathcal{O},\psi) \to (x^1,\dots,x^n)$ lok. koord. $g_{\mu\nu}$: $\quad g_{ab}\big|_{\mathcal{O}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\,(dx^\mu)_a\,(dx^\nu)_b$

g^{ab}: $\quad g^{ab} g_{bc} = \delta^a{}_c \qquad g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$.

Szignatúra: $\exists\, g_{ab}$ metrika M-en. Ekkor $\forall p \in M$ pontban a $T(p)$ érintőtér egy olyan $\{(e_{(\mu)})^a\}$ $\mu = 1,\dots,n$ ort. norm. bázis

g_{ab} komponensei

$$|g_{\mu\nu}| = \delta_{\mu\nu} = |\underbrace{g_{ab}(e_{(\mu)})^a (e_{(\nu)})^b}_{\pm 1}|$$

A $+1$ és -1 belsőszorzattal rendelkező báziselemek száma ftlen az aktuális $\underbrace{\text{ort.n. bázistól}}_{\infty \text{ sok } \exists}$

Def.: Azon bázisvektorokat számát, melyekhez pozitív ill. negatív belsőszorzat tartozik a metrika szignatúrájának nevezzük.

Megj.: $(\underbrace{-,\dots,-}_{m},\underbrace{+,\dots,+}_{n-m})$, $\quad s = n-2m$

Megj.: A $(+,\dots,+)$ szignatúrájú metrikákat Riemann-féléknek, a $(-,+,\dots,+)$ —— " —— Lorentz-féléknek nevezzük.

okt. 19

(1)

Hf.: Legyen $(\mathcal{M}, g)$ térkép M-en $(x^1, \dots, x^n)$ lok. koord.-kal valamint $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\right\} \subset T(\mathcal{M})$ koord. bázis mező és $\{(dx^\mu)_a\} \subset T^*(\mathcal{M})$ ált.-nal az ennek megfelelő duális bázis mező.

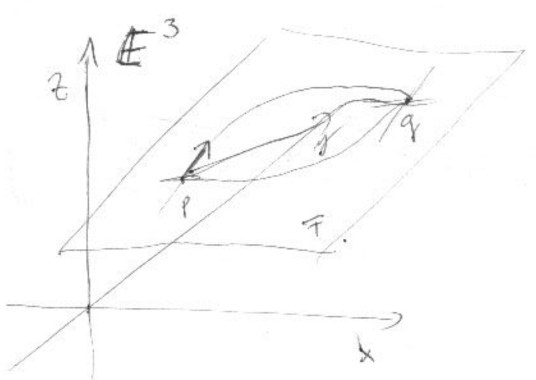
Mutassuk meg, hogy az imént meghatározott bázis ftlen ~~(nem...)~~ izomorfizmusok csak nagyon speciális metrika esetén adják vissza a $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \longleftrightarrow (dx^\mu)_a$ megfeleltetést!

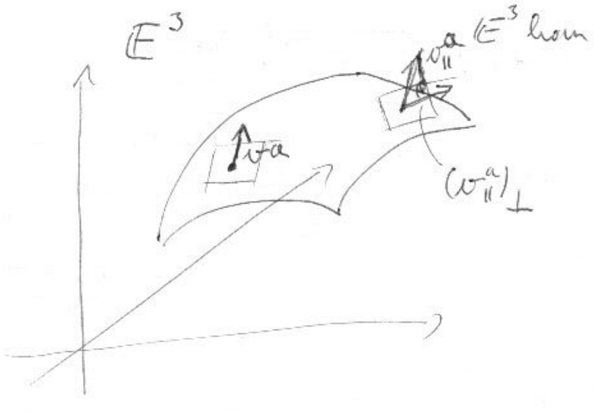
Kovariáns derivált

Tenzorok kivonásának (deriválthat) nincs értelme, mert különböző terekben vannak.

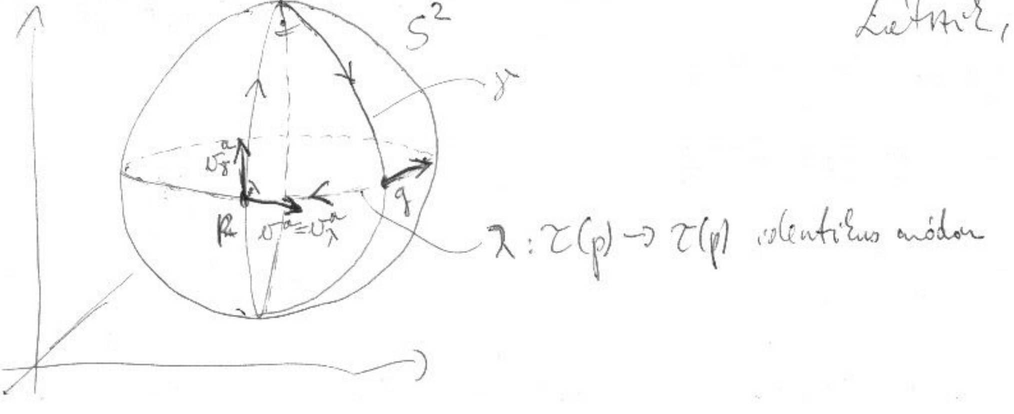
A megfeleltetést a "párhuzamos eltolások" segítségével kapjuk meg.

Párhuzamos eltolások (0. megközelítés)





Levi-Civita (1917)



Látszik, hogy v^a_γ függ γ-tól.

Kovariáns derivált (2)

Def.: Kovariáns deriváláson olyan

$$\nabla_a : \mathcal{T}^k_l(M) \to \mathcal{T}^k_{l+1}(M)$$

a C^m-oszt., (k,l) típusú tenzormezők teréből a C^{m-1}-oszt., $(k,l+1)$-típ. tenzormezők terébe menő leképezést értünk, mely eleget tesz az alábbi négy feltételnek:

1) lineáris, azaz tetsz. $T,S \in \mathcal{T}^k_l(M)$ és $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ választása esetén

$$\nabla_c(\alpha T^{\dots}_{\dots} + \beta S^{\dots}_{\dots}) = (\alpha \nabla_c T^{\dots}_{\dots}) + \beta(\nabla_c S^{\dots}_{\dots})$$

2) eleget tesz a Leibnitz-szabálynak, azaz bármely $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$ és $S \in \mathcal{T}^{k'}_{l'}(M)$ esetén:

$$\nabla_c(T^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l} S^{c_1\dots c_{k'}}_{d_1\dots d_{l'}}) = (\nabla_c T)S + T(\nabla_c S)$$

„$\otimes$"

3) Felcserélhető a kontrakció műveletével, azaz tetsz. $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$

$$\nabla_c(\underbrace{T^{a_1\dots \overset{i}{e} \dots a_k}_{b_1\dots \overset{j}{e} \dots b_l}}_{C^i_j T}) = C^i_{j+1}(\nabla_c T^{a_1\dots a_k}_{b_1\dots b_l})$$

(4) Összhangban van azzal, ahogy a skalárfv.-re ható iránymenti deriváltat értelmeztük, azaz $\forall f \in \mathcal{F}^{(m)}(M)$ és $t^a \in \mathcal{T}(M)$-re teljesül:

$$t(f) = t^e \nabla_e f$$

Ha $\exists\ \nabla_a$ kov. deriv. $\Rightarrow$ definiálható kovari (azaz $\exists$?) Ált.rel ③

$T^c{}_{ab} \in \tau^1_2(M)$ melyet ∇_a torziótenzorának nevezzük és úgy definiáljuk, hogy

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = \underbrace{-T^c{}_{ab}}_{\text{Torziótenzor}} \nabla_c f$$

tetsz. $f \in \mathcal{E}^{(2)}(M)$

Megj.: Sok esetben 5 tulajdonság kívül megkövetelik, hogy a ∇_a leképezés legyen torziómentes, azaz teljesüljön ~~ttt~~ $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ reláció.

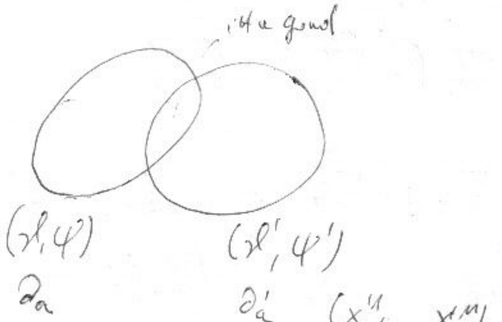
Létezik-e egyáltalán ez az operátor? (Kovariáns deriválás)

Lokálisan igen.

Legyen $(\mathcal{U}, \varphi)$ térkép M-en $(x^1, \dots x^n)$ lok. koord. Legyen $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ legalább C^1 oszt. tenzormező $\mathcal{U}$-n. ~~Def.~~ a $\partial_a : \tau^k_l(\mathcal{U}) \to \tau^k_{l+1}(\mathcal{U})$

$\partial_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} \in \tau^k_{l+1}(\mathcal{U})$, ~~akkor~~ amelynek komp.-eit a

$$\frac{\partial T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l}}{\partial x^\gamma}$$



kifejezéssel adjuk meg.

Legyen $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ és $v^a \in \tau(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$

$$v'^\beta(x') = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha(x) \left(\frac{\partial x'^\beta(x)}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$x^\mu = x^\mu(x') \Longleftrightarrow \varphi' \circ \varphi^{-1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial v'^\beta}{\partial x'^\gamma}}_{\in \tau^1_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')} = \sum_{\delta, \alpha = 1}^n \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\delta} \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \right) \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \right) + \underbrace{v^\alpha(x) \frac{\partial^2 x'^\beta(x)}{\partial x^\delta \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma}}_{\text{Extra tag}} \right)$$

$X = X(x')$ lin. kell legyen, ahhoz, hogy $\partial_\circ v^a$ tenzorként transzformálódjék.

nov. 9.

$$\frac{\partial v'^\beta}{\partial x'^\gamma} = \sum_{\alpha,\delta=1}^{n} \left\{ \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\delta} \cdot \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} + \underbrace{v^\alpha \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma}}_{? = 0} \right\}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} = 0$ csak akkor, ha a koord. rendszerek között lineáris a kapcsolat.

Legyenek ∇_a és $\tilde{\nabla}_a$ kovariáns deriváló operátorok. Mennyiben tér el ezek hatása differenciálható fv-eken.

Lemma 1 $\forall f \in \mathcal{F}^{(1)}(M)$ $\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f$

(4) tulajdonságból $\Rightarrow$ $t(f) = t^a \nabla_a f = t^a \tilde{\nabla}_a f$, valamint t^a tetsz. $\Rightarrow$ az állítás

Megj.: Legyen $(\mathcal{U}, \varphi)$ térkép és ∂_a lok. értelmezett kovariáns der. op.

$$\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f = \partial_a f$$

Mi a ∇_a és $\tilde{\nabla}_a$ op hatásának eltérése tetsz. $\omega_a \in \mathcal{T}^*(M)$ esetén? Legyen f és ω_a diffható fv. és duális vektormező M-en.

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(f\omega_b) \overset{(2)}{=} \underbrace{\left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) f\right]}_{= 0 \ (L.1)} \omega_b + f\left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b\right]$$

Legyen $p \in M$ és $f(p) = 1$, $f(x \neq p) =$ tetsz.

$\tilde\nabla_a - \nabla_a : \tau_1^0(p) \to \tau_2^0(p)$ lineáris és nem függ attól, hogy τ_1^0 elemei hogyan változnak

nov. 9.

(1)

Ált.rel.

$$\exists \left[L(\omega)\right]_{ab}^{p} = \underset{\substack{\uparrow \\ \exists \tau_2^1(M)}}{C^c{}_{ab}}\,\omega_c \quad \Rightarrow \quad (\tilde\nabla_a - \nabla_a)\omega_b = C^c{}_{ab}\,\omega_c$$

p tetsz.

$$\boxed{\nabla_a \omega_b = \tilde\nabla_a \omega_b - C^c{}_{ab}\,\omega_c}$$

Torzió tenzor létezése: $\omega_a = \nabla_a f = \tilde\nabla_a f$, ahol $f \in \mathcal{F}^2(M)$

$$\nabla_a(\underbrace{\nabla_b f}_{\omega_b}) = \tilde\nabla_a \tilde\nabla_b f - C^c{}_{ab}\nabla_c f$$

Tfh. $\tilde\nabla_a$ torziómentes és tekintsük $[ab]$

$$\underbrace{2\nabla_{[a}\nabla_{b]} f}_{(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) f} = -C^c{}_{[ab]}\nabla_c f \qquad \text{input (5)}$$

$$\Rightarrow T^c{}_{ab} = C^c{}_{[ab]}$$

Megj.: Ha mind ∇_a, mind pedig $\tilde\nabla_a$ torziómentes $\Rightarrow C^c{}_{[ab]} = 0$

Ha mindkettőnek van torziója, $T^c{}_{ab} - \tilde T^c{}_{ab} = C^c{}_{[ab]}$

---

folyt.

Legyenek $t^a \in \tau(M)$ és $\omega_a \in \tau^*(M)$ diffható vekt. mezők M-en.

$$(\tilde\nabla_a - \nabla_a)(\underbrace{t^b\omega_b}_{fv.}) \overset{L.1.}{=} 0$$

$$(\tilde\nabla_a - \nabla_a)(t^b\omega_b) = \left[(\tilde\nabla_a - \nabla_a)t^b\right]\omega_b + t^e C^b{}_{ae}\,\omega_b = 0$$

és ω_b tetsz.
$$\boxed{\nabla_a t^b = \tilde\nabla_a t^b + C^b{}_{ae}\, t^e}$$

Megmutatható, hogy tetsz. $T \in \mathcal{T}^k{}_l(M)$ tenzormező esetén igaz

$$\boxed{\nabla_c T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots b_l} = \tilde{\nabla}_c T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots b_l} + \sum_{i=1}^{k} C^{a_i}{}_{ce}\, T^{a_1\dots \overset{\downarrow i}{e} \dots a_k}{}_{b_1\dots b_l} - \sum_{j=1}^{l} C^{e}{}_{cb_j}\, T^{a_1\dots a_k}{}_{b_1\dots \underset{\uparrow j}{e} \dots b_l}}$$

Ha van egy kovariáns deriváló operátor a $C^a{}_{bc}$ ~~típusú~~ tenzorral ∞ sokat tudok gyártani.

Legyen $O(\mathcal{U})$ egy térkép ∂_a lok. ért. kov. deriv. op. Ekkor $\mathcal{U}$ felett $C^c{}_{ab}$ tenzormezőt, amely valamely ∇_a kovariáns deriv. op.-hoz kapcsolja ∂_a-t $\Gamma^c{}_{ab}$-vel jelöljük és Christoffel-féle szimbólumoknak nevezzük őket. $\Gamma^c{}_{ab} \in \mathcal{T}^1{}_2(\mathcal{U})$ és sehol máshol.

Pl.: $\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b{}_{ae} t^e$! $\mathcal{U}$ felett csak

Párhuzamos eltolás

Def.: Legyen ∇_a kov. deriv. op., $v^a \in \mathcal{T}^{(1)}(M)$ tetsz., valamint $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \to M$ differenciálható görbe, melynek érintővektorát t^a jelöli. Ekkor azt mondjuk, hogy a v^a vektormező párhuzamosan elterjesztett a λ görbe mentén, ha a

$$(t^e \nabla_e v^a) = 0, \qquad (1)$$

egyenlőség teljesül. Hasonlóan definiálható tetsz. tenzormező λ mentén vett párhuzamos elterjesztettsége is.

nov. 9

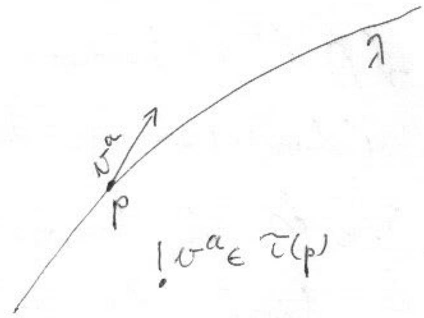
2

Ált. rel

Legyen $(\mathcal{U},\psi)$ térkép, melyen $(x^1,\dots,x^n)$ lok. koord. $\to \partial_a \to$

$\to {}_u\nabla_a - \partial_a \Rightarrow \Gamma^c{}_{ab}$

$$\left(t^e\partial_e v^b + \Gamma^b{}_{ef}\, t^e v^f\right)\Big|_\lambda = 0$$



λ: $x^\mu = x^\mu(t)$, $t^\mu = \frac{dx^\mu(t)}{dt}$ görbe definíciója

$$\underbrace{\underbrace{\frac{dx^\mu}{dt}}_{t^\mu}\underbrace{\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\mu}}_{\partial_\mu v^\beta}}_{\to\ \frac{dv^\beta}{dt}} + \Gamma^\beta{}_{\varepsilon\varphi}(t)\, t^\varepsilon(t)\, v^\varphi(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv^\beta(t)}{dt} + \Gamma^\beta{}_{\varepsilon\varphi}\, t^\varepsilon v^\varphi = 0 \iff (1)$$

Elsőrendű közönséges diffegyenlet a v^β fv.-re

$\exists$ egyért. m.o. ha $\Gamma^\beta{}_{\varepsilon\varphi}t^\varepsilon$ fv-ek C^{1-}

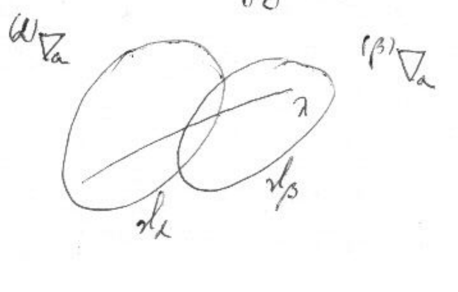
C^{1-}: lokálisan Lipschitz-félék:

$\exists K \in \mathbb{R}$ hogy $\forall\, p,q \in M$ $|f(p)-f(q)| < K|p-q|$ az gyenge felt.

Az imént def. párhuzamos eltolás segítségével a különböző pontokhoz tartozó érintőterek elemeit — görbe függő módon — megfeleltethetjük egymásnak.

Legyen M differenciálható sokaság $\{(\mathcal{U}_\alpha,\psi_\alpha)\}$ $\forall\alpha$-ra $\mathcal{U}_\alpha$-hoz $\exists$ ${}^{(\alpha)}\partial_a$ lok. kov. deriv. operátor és ${}^{(\alpha)}\Gamma^c{}_{ab}$ tenz. $\in \mathcal{T}^1_2(\mathcal{U}_\alpha) \to {}^{(\alpha)}\nabla_a$ $\mathcal{U}_\alpha$ felett!

Meg kell adni egy kiválasztási eljárást a ${}^{(\alpha)}\Gamma^c{}_{ab}$ konexiókra.



Tetsz. v^a nem-metsző egy tetsz. választott λ görbe mentén pontosan akkor legyen párhuzamosan eltranszportált a $\lambda\cap[\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta]$

görbe mentén ∇_a-ra vonatkozóan, ha az a ∇'_a-ra nézve, és viszont.

<u>Áll.:</u> Legyenek $(\mathcal{O},\psi)$ és $(\mathcal{O}',\psi')$ térképek egymással átfedőek, valamint $(x^1,\dots,x^n)$ és $(x'^1,\dots,x'^n)$ lok. koord. rajtuk. Ekkor az $\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'$ halmazon tetsz. kiválasztott görbe mentén egy tetsz. vektormező pontosan akkor párhuzamosan elterjesztett a ∇_a és ∇'_a kovariáns operátorokra nézve ha a hozzájuk tartozó Christoffel-szimbólumok koord. komponenseire a

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma'^{\delta}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\delta}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 x'^{\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\delta}} \quad (1)$$

relációk teljesülnek.

<u>Biz.:</u> Legyenek a λ görbe és v^a vekt. mezők tetsz. Ekkor λ mentén a $t^e\nabla'_e v^b = 0$ egyenlet az $(x'^1,\dots,x'^n)$ lok. koord.-ban a

$$t'^{\mu}\partial'_{\mu}v'^{\nu} + \Gamma'^{\nu}_{\mu\sigma}t'^{\mu}v'^{\sigma} = 0 = t^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(v^{\beta}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right) + \Gamma'^{\nu}_{\mu\sigma}\left(t^{\alpha}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(v^{\beta}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right) =$$

$$= \left(t^{\alpha}\partial_{\alpha}v^{\beta}\right)\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + t^{\alpha}v^{\beta}\left[\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} + \Gamma'^{\nu}_{\mu\sigma}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right], \quad (2)$$

ahol $t'^{\mu} = t^{\alpha}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$ és $t'^{\mu}\partial'_{\mu} = \underbrace{\left(t^{\alpha}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)}_{t'^{\mu}}\underbrace{\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}\right)\partial_{\beta}}_{\partial'_{\mu}} = t^{\alpha}\partial_{\alpha}$

ha $(2)\cdot\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \Rightarrow \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}\right)\left[t'^{\mu}\partial'_{\mu}v'^{\nu} + \Gamma'^{\nu}_{\mu\sigma}t'^{\mu}v'^{\sigma}\right] =$

$= t^{\alpha}\partial_{\alpha}v^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}t^{\alpha}v^{\beta}$ feltéve, hogy (1) egyenlet teljesül

A metrikával kompatibilis kovariáns derivált

$g_{ab} \to \nabla_a$: $\boxed{\nabla_a g_{bc} = 0}$ ekkor kompatibilis

Lemma: Legyen t^a a $\lambda : I(\subset \mathbb{R}) \to M$ érintővektora. Legyen ∇_a olyan kovariáns deriv. op. melyre a fenti reláció teljesül. Legyenek továbbá v^a és w^a a λ görbe mentén párhuzamosan eltenjesztett vektormezők. Ekkor a v^a és w^a vektormezők belső szorzata állandó a λ görbe mentén.

Biz.: v^a és w^a párh. eltenjesztett λ mentén: $(t^e \nabla_e v^a)_\lambda =$

$$= (t^e \nabla_e v^a)_\lambda = (t^e \nabla_e w^a)_\lambda = 0$$

belső szorz: $\boxed{t^e \nabla_e (g_{ab} v^a w^b) = t^e (\nabla_e g_{ab}) v^a w^b = 0}$

a λ görbe mentén a belső szorzat áll.

Állítás: Legyen g_{ab} metrika M-en. Ekkor g_{ab} egyértelműen meghatároz egy olyan torziómentes kov. deriv. op-t, mely eleget tesz a fenti feltételnek.

Biz.: Legyen $(\mathcal{U}, \varphi)$ az $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ C^r oszt. atlasz egy telje. térképe, továbbá ∂_a és Γ^c_{ab} a rajta ért KDO. és a Christoffel-szimbólumok.

$$\nabla_a g_{bc} \overset{\mathcal{U}}{=} \partial_a g_{bc} - \Gamma^e_{ab} g_{ec} - \Gamma^e_{ac} g_{be} \overset{\text{fenti}}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma_{cab} + \Gamma_{bac} = \partial_a g_{bc}} \quad (1)$$

2

1. $(a \curvearrowright b)$, 2. $(c \curvearrowleft a)$

$$\boxed{\Gamma_{cba} + \Gamma_{abc} = \partial_b g_{ac}} \quad (2)$$

$$\boxed{\Gamma_{acb} + \Gamma_{bca} = \partial_c g_{ab}} \quad (3)$$

$T^c_{ab} = -C^c_{[ab]} = 0 \Rightarrow \nabla_a$ torziómentes, akkor $\Gamma^e_{ab} = \Gamma^e_{ba}$

$(1) + (2) - (3)$

$$\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab} = 2\Gamma_{cab} \Longleftrightarrow \Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{ce}\{\partial_a g_{be} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab}\}$$

Hf: Legyenek, $(x^1, \dots x^n)$ és $(x'^1, \dots, x'^n)$ lokális koordinátáк az egymással átfedésben lévő $(\mathcal{U}, \psi)$ és $(\mathcal{U}', \psi')$ térképeken. Mutassuk meg, hogy az $(\mathcal{U}, \psi)$ felett értelmezett

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\varepsilon}\{\partial_\alpha g_{\beta\varepsilon} + \partial_\beta g_{\alpha\varepsilon} - \partial_\varepsilon g_{\alpha\beta}\}$$

a $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma'^\gamma_{\mu\nu} \partial x \dots$ (előző óra) egyenletnek megfelelően transzformálódnak az $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ halmaz felett.

A görbületi tenzor

A párhuzamos eltolás görbefüggőségével „erősségét" fejezi ki.

Legyen ∇_a torziómentes KDO, valamint f és ω_a legalább kétszer differenciálható függvény és kovariáns vektormező M-en.

$$\nabla_a\nabla_b(f\omega_c) = \nabla_a\big((\nabla_b f)\omega_c + f(\nabla_b\omega_c)\big) = (\nabla_a\nabla_b f)\omega_c + (\nabla_b f)(\nabla_a\omega_c) +$$

$$+(\nabla_a f)(\nabla_b\omega_c) + f(\nabla_a\nabla_b\omega_c) \qquad \Big/\,[ab]\,,\ \cdot 2$$

$$2\,\cancel{\nabla_a f\,\nabla_b}\,\nabla_{[a}f\,\nabla_{b]}\omega_c = 0 \qquad\qquad 2\nabla_{[a}\nabla_{b]} = \nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$$

$$\boxed{(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(f\omega_c) = f\,(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\,\omega_c}$$

legyen f olyan, hogy $f(p)=1$, különben tetsz.

Ahhoz hasonlóan a $C^c{}_{ab}$ (1,2) típ. tenzort bevezettük, belátható: $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a : T^0_1(p) \to T^0_3(p)$ lin leképezés ftlen $T^0_1(p)$ elemeinek a p pont környezetében való viselkedésétől. $\Rightarrow \exists\, R_{abc}{}^d \in T^1_3(p)$ úgy, hogy

$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\,\omega_c = R_{abc}{}^d\,\omega_d$ és p tetsz. $\Rightarrow \exists\, R_{abc}{}^d \in \mathcal{T}^1_3(M)$ melyet görbületi vagy Riemann-tenzornak nevezünk.

<u>Hf:</u> Mutassuk meg, hogy amikor $\tilde{\nabla}_a$ KDO. nem eltűnő T^c_{ab} torzióval rendelkezik, akkor a fentiekhez teljesen analóg érvelés révén, egyrészt a $[(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) + T^c_{ab}] f w_c = f[(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) + T^c_{ab}] w_c$ reláció igaz, másrészt $\exists$ olyan $(1,3)$ típusú $R_{abc}{}^d$ tenzormező M-en, melyre

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) w_c = R_{abc}{}^d w_d - T^e_{ab}\nabla_e w_c$$ egyenlőség

teljesül.

Legyen ∇_a torziómentes KDO. $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ t^a, $T \in \mathcal{T}^l{}_e$?

Legyenek w_a és t^a tetsz. legalább kétszer differenciálható mezők M-en.

$0 = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(t^c w_c) =$ Leibnitz-szabályból $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \nabla_a[(\nabla_b t^c) w_c + t^c(\nabla_b w_c)] - \nabla_b[(\nabla_a t^c) w_c + t^c(\nabla_a w_c)] =$

$= [(\nabla_a\nabla_b t^c) w_c + \cancel{(\nabla_b t^c)(\nabla_a w_c)}_{①} + (\nabla_a t^c)(\nabla_b w_c)_{②} + t^c(\nabla_a\nabla_b w_c)] -$

$- [(\nabla_b\nabla_a t^c) w_c + \cancel{(\nabla_a t^c)(\nabla_b w_c)}_{②} + \cancel{(\nabla_b t^c)(\nabla_a w_c)}_{①} + t^c(\nabla_b\nabla_a w_c)] =$

$= [w_c(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) t^c] + t^e\underbrace{(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) w_e}_{R_{abe}{}^{c} w_c}$ $\quad w_a$ tetsz. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a) t^c = - R_{abe}{}^c t^e$

Hasonlóan az is megmutatható, hogy $T^{c_1\dots c_k}{}_{d_1\dots d_l} \in \mathcal{T}^k_l(M)$ Ált. rel. nov. 16.

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\, T^{c_1\dots c_k}{}_{d_1\dots d_l} = -\sum_{i=1}^{k} R_{abe}{}^{c_i}\, T^{c_1\dots \overset{i}{\downarrow}{e} \dots c_k}{}_{d_1\dots d_l} + \qquad (3)$$

$$+\sum_{j=1}^{l} R_{abd_j}{}^{e}\, T^{c_1\dots c_k}{}_{d_1\dots \underset{\overset{\uparrow}{j}}{e} \dots d_l}$$

A görbület tulajdonságai

Áll: Legyen ∇_a torziómentes KDO, $R_{abc}{}^{d}$ pedig a ∇_a hoz tartozó görbületi tenzormező M-en. Ekkor

(1) $R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}$ ✓

(2) $R_{[abc]}{}^{d} = 0$

(3) $R_{abcd} = -R_{abdc}$ feltéve, hogy ∇_a a metrikával kompatibilis KDO.

(4) teljesül a $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$ Bianchi-azonosság.

Lemma: Legyen ∇_a torziómentes kovariáns deriváló operátor, valamint ω_a legalább diffható ~~duá~~ kovariáns vektormező M-en. Ekkor $\boxed{\nabla_{[a}\nabla_b\,\omega_{c]} = 0}$

Biz.: $\nabla_{[a}(\underbrace{\nabla_b\,\omega_{c]}}_{\partial}) \equiv (\partial_b\omega_c - \Gamma^{e}{}_{bc}\,\omega_e) = \partial_{[[a}\partial_{b]}\,\omega_{c]} + [-(\partial\Gamma)\Gamma\omega +$

Hf. ellenőrz.

$+ \dots + (\partial\Gamma)\Gamma\,\partial\omega + \dots] = 0$

$\Gamma^{c}{}_{[ab]} = 0$ a torziómentesség miatt

$\Gamma^{e}(\partial_e\Gamma^{f}{}_{[ab]})\,\omega_f = 0$

(2) $\forall \omega_a$ -ra $\quad 0 = 2\nabla_{[a}\nabla_b \nabla_{c]} = \nabla_{[a}\nabla_b \omega_{c]} - \nabla_{[b}\nabla_a \omega_{c]} =$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tetsz}}}{R_{[abc]}{}^d \omega_d} \Longrightarrow R_{[abc]}{}^d = 0$$

(3) $\nabla_a g_{cd} = 0$

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}$$

$$\boxed{R_{abcd} + R_{abdc} = 0}$$

(4) $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$ alkalmazzuk $\nabla_c \omega_d$ -re

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\nabla_c \omega_d = R_{abc}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{abd}{}^e \nabla_c \omega_e \quad /_{[abc]}$$

$$\nabla_a\left([\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b]\omega_d\right) = \nabla_a\left[R_{bcd}{}^e \omega_e\right] = (\nabla_a R_{bcd}{}^e)\omega_e + R_{bcd}{}^e (\nabla_a \omega_e)$$

$/_{[abc]}$

páros permutáció

$$\underbrace{R_{[abc]}{}^e}_{\substack{(2)\text{ miatt} \\ 0}} \nabla_e \omega_d + \cancel{R_{[ab|d|}{}^e \nabla_{c]} \omega_e} = \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e \omega_e + \cancel{R_{[bc|d|}{}^e \nabla_{a]} \omega_e}$$

mivel ω_e tetsz. ezért a Bianchi-azonosság igaz

Hf.: Mutassuk meg, hogy az (1), (2) és (3) tul. miatt $R_{abcd} = R_{cdab}$ egyenlőség is teljesül, feltéve, hogy ∇_a KDO olyan, hogy $\nabla_a g_{bc} = 0$

$$\boxed{\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\varepsilon}\left\{\partial_\alpha g_{\beta\varepsilon} + \partial_\beta g_{\alpha\varepsilon} - \partial_\varepsilon g_{\alpha\beta}\right\}} \Longrightarrow \boxed{\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma'^\tau{}_{\delta\mu}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}} \qquad (1)$$

Biz.:

$$g_{\beta\varepsilon} = g'_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} \quad \& \quad g^{\gamma\varepsilon} = g'^{\tau\sigma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\sigma}$$

$$\partial_\alpha\Big(\overbrace{g'_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon}}\Big) = \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\alpha}\cdot\left(\partial'_\delta g'_{\mu\nu}\right)\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} + g'_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} + g'_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\varepsilon}$$

$\Downarrow$

$$(+)\quad g^{\gamma\varepsilon}\partial_\alpha g_{\beta\varepsilon} = \left(g'^{\tau\sigma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\sigma}\right)\left[\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\alpha}\left(\partial'_\delta g'_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} + g'_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} + \cancel{g'_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\varepsilon}}\right]$$

$$(+)\quad g^{\gamma\varepsilon}\partial_\beta g_{\alpha\varepsilon} = \left(g'^{\tau\sigma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\sigma}\right)\left[\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta}\cdot\left(\partial'_\delta g'_{\mu\nu}\right)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} + g'_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} + \cancel{g'_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta\partial x^\varepsilon}}\right]$$

$$(-)\quad g^{\gamma\varepsilon}\partial_\varepsilon g_{\alpha\beta} = \left(g'^{\tau\sigma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\sigma}\right)\left[\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon}\cdot\left(\partial'_\nu g_{\mu\delta}\right)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} + \cancel{g'_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\varepsilon\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}} + \cancel{g'_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\varepsilon\partial x^\beta}}\right]$$

$$\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\sigma}\cdot\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\varepsilon} = \delta^\nu_\sigma$$

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}g'^{\tau\sigma}\left\{\partial'_\delta g'_{\mu\sigma} + \partial'_\mu g'_{\delta\sigma} - \partial'_\sigma g_{\delta\mu}\right\}\right)}_{:=\,\Gamma'^\tau{}_{\delta\mu}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{2}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\delta^\nu_\sigma\overbrace{g'^{\tau\sigma}g'_{\mu\nu}}^{g'^{\tau\sigma}g'_{\mu\sigma}=\delta^\tau_\mu}\cdot\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}}_{=\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}}$$

$\square$

<u>1.2.</u>: (1.b) $\Longleftrightarrow$ $\left(t^a\nabla_a v^b = 0 \Longleftrightarrow t^a\nabla'_a v^b = 0\right.$, ahol $\nabla_a \leftarrow \mathcal{O}, \partial_a, \Gamma^c_{ab}$ & $\left.\nabla'_a \leftarrow \mathcal{O}', \partial'_a, \Gamma'^c_{ab}\right)$

$t'^\mu = t^\alpha\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$; $t'^\mu\partial'_\mu v'^\nu + t'^\mu\Gamma'^\nu_{\mu\sigma}v'^\sigma = t^\alpha\partial_\alpha\left(v^\beta\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\right) + t^\alpha\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\Gamma'^\nu_{\mu\sigma}v^\beta\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} = \left(t^\alpha\partial_\alpha v^\beta\right)\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + t^\alpha v^\beta\left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} + \Gamma'^\nu_{\mu\sigma}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}\right) \Rightarrow$ $1\times\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\right)$

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\left(t'^\mu\partial'_\mu v'^\nu + t'^\mu\Gamma'^\nu_{\mu\sigma}v'^\sigma\right) = t^\alpha\partial_\alpha v^\gamma + t^\alpha\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}v^\beta$$

, ha (1.b) teljesül. Biz. k–. $\square$

① Ált. rel.

∇_a torziómentes $\longrightarrow$ $R_{abc}{}^{d}$: Riemann tenzor

(1) $R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}$

(2) $R_{[abc]}{}^{d} = 0$

(3) $\nabla_a g_{bc} = 0 \Rightarrow R_{abcd} = -R_{abdc}$

(3') $R_{abcd} = R_{cdab}$

(4) $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$ Bianchi-azonosság

A Ricci-tenzor és a skalárgörbület

$R_{a}{}^{a}{}_{c}{}^{d} = 0$ mert $R_{[ab]c}{}^{d} g^{(ab)} = 0$

$R_{abc}{}^{c} = 0$ mint az előbb

$R_{abc}{}^{b} \neq 0$ nem feltétlenül

Def.: A Riemann-tenzorból az $R_{ab} = R_{acb}{}^{a}$ kontrakcióval képzett (0,2)-típusú tenzormezőt Ricci-tenzornak nevezzük.

$$\left[R_{ab} = R_{aeb}{}^{e} \overset{(1)(3')}{=} R_{ea}{}^{e}{}_{b} \underset{(1)(2)}{\overset{(3')}{=}} R_{b}{}^{e}{}_{ae} = R_{ba} \right] \Rightarrow \boxed{R_{ab} = R_{(ab)}}$$

Def.: A Ricci-tenzorból az

$$R = R_{ab} g^{ab} = R_{a}{}^{a}$$

kontrakcióval képzett skalárt Riemann, vagy görbületi skalárnak nevezzük

A g_{ab} metrika, az R_{ab} Ricci-tenzor és az R görbületi skalár felhasználásával különválaszthatjuk a görbületi tenzor azon — Weyl-tenzornak nevezett ~~és~~ W_{abcd}-vel jelölt ~~részét~~ — részét, melynek ∀ indexpárban vett kontrakciója azonosan zérus.

Legyen $n \geq 3$ (n-dim. M-ek).

$$R_{abcd} = W_{abcd} + \frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R\, g_{a[c}g_{d]b} \qquad (*)$$

Hf.: Mutassuk meg, hogy a (*) egyenlet által definiált Weyl tenzor rendelkezik az (1), (2), (3) tulajdonságokkal és ∀ indexpárban vett kontrakciója zérus

---

A görbületi tenzor algebrailag független elemeinek száma

R_{abcd} (0,4)-típ. n^4 komponense van, ha $n=4$ akkor 256

a specializáltság miatt összesen 20 van.

$$R_{\underbrace{[ab]}_{N=\frac{n(n-1)}{2}}\underbrace{[cd]}_{N=\frac{n(n-1)}{2}}}$$

(1) (3)

$(3') \Rightarrow \dfrac{N(N+1)}{2}$

$\sqrt{\ldots}$ (2) eq.

Hf. Def. az H_{abcd} (0,4) típ. tenzor mezőt, az $H_{abcd} = R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad}$ összefüggéssel. Az (1), (2), (3) tul. felhasználásával mutassuk meg, hogy H_{abcd} telj. antiszimmetrikus $H_{abcd} = H_{[abcd]}$

(2) $\sqrt{\ldots}$ Hf $\Rightarrow$ $A_{abcd} = A_{[abcd]} = R_{[abcd]} + R_{[caba]} + R_{[bcad]} = 0$ ② Ált.rel.

$$R_{[[abc]d]} = R_{[abcd]} \text{ és } R_{[abc]d} = 0$$

$\Longleftrightarrow$ „ $0 = 0$ " ha $\forall$ két index ugyanazt az értéket veszi fel.

ha $n < 4 \Rightarrow$ csak $0 = 0$ algebrai reláció következik (2)-ből.

ha $n \geq 4 \rightarrow \binom{n}{4}$

Hf.: Mutassuk meg, hogy R_{abcd} algebrailag független ~~elemeinek~~ komponenseinek száma $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ $\qquad \frac{N(N+1)}{2} - \binom{n}{4}$

Spec. eset $n = 2$ 1db algebrailag ftlen eleme van R_{abcd}

$${}^{(2)}R_{abcd} = -R\, g_{a[c}\, g_{d]b} \qquad \text{Gauss: Theorema Egregium}$$

Spec. eset $n = 3$ $\quad \frac{n^2(n^2-1)}{12} = 6 \qquad R_{ab} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ \\ & & \circ \end{pmatrix}$

$$\boxed{{}^{(3)}R_{abcd} = 2\, g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a} - R\, g_{a[c}\, g_{d]b}}$$

Kontrahált Bianchi-azonosságok

(4) $\underbrace{\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e}} = 0 \Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{3!}\left[\nabla_a R_{bcd}{}^{e} + \nabla_c R_{abd}{}^{e} + \nabla_b R_{cad}{}^{e} - \nabla_b R_{acd}{}^{e} - \nabla_c R_{bad}{}^{e} - \nabla_a R_{cbd}{}^{e}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla_a R_{bcd}{}^{e} + \nabla_c R_{abd}{}^{e} + \nabla_b R_{cad}{}^{e} = 0} \Longleftrightarrow (4)$$

kontraháljuk „a", „e" indexekben
Egyszer kontrahált Bianchi-azonosság

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd} = 0 \qquad / \text{„}g^{cd}\text{"} \ \& \ \text{„}b\text{", „}e\text{" kontr.}$$

A kétszer kontrahált

$$\boxed{\nabla_a R_c{}^a - \nabla_c R + \nabla_a R_c{}^a = 0} \qquad (*)$$

Einstein-tenzor $\quad G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\nabla^a G_{ab} = 0} \quad \text{egyenértékű } (*) \text{ egyenlettel}$$

$(*)$ egy integrálhatósági feltétel $\quad G_{ab} = \kappa T_{ab}$

$$\nabla^a T_{ab} = 0$$

A görbület kiszámításának főbb módszerei

$g_{ab} \longrightarrow R_{abcd} \qquad$ Koordináta komponensekre alapozott meghatározás

Legyen $(\mathcal{U}, \psi)$ tetsz. térkép $(x^1, \dots, x^n)$ lok. koord.-kal. $\exists \partial_a$,

$\Gamma^e_{ab}: \nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma^e_{bc} \omega_e \qquad \omega_c \in T^*(M)$

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} \omega_c = \nabla_{[a} \left[\partial_{b]} \omega_c - \Gamma^e_{b]c} \omega_e \right] = \partial_{[a} \left[\partial_{b]} \omega_c - \Gamma^e_{b]c} \omega_e \right] - \Gamma^f_{[ab]} \left[\partial_f \omega_c - \Gamma^e_{fc} \omega_e \right] - \Gamma^f_{[ac} \left[\partial_{b]} \omega_f - \Gamma^e_{b]f} \omega_e \right]$$

nov. 2

3

Ált. rel

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c = R_{abc}{}^{d}\omega_d = -2\partial_{[a}\Gamma^{e}_{b]c}\,\omega_e \cancel{- 2\Gamma^{e}_{[bc}\partial_{a]}\omega_e} -$$

$$\cancel{-2\Gamma^{f}_{[ac}\partial_{b]}\omega_f} + 2\Gamma_{[ac}{}^{f}\,\Gamma^{e}_{b]f}\,\omega_e$$

$ab \to +$

ω_e tetsz. $\boxed{R_{abc}{}^{e} = \partial_b\Gamma^{e}_{ac} - \partial_a\Gamma^{e}_{bc} + \left(\Gamma^{f}_{ac}\Gamma^{e}_{bf} - \Gamma^{f}_{bc}\Gamma^{e}_{af}\right)}$

$g_{ab} \to \nabla_a \to \boxed{\Gamma^{c}_{ab} = \frac{1}{2} g^{ce}\left\{\partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab}\right\}}$

Még egyszer a vektormezőkről

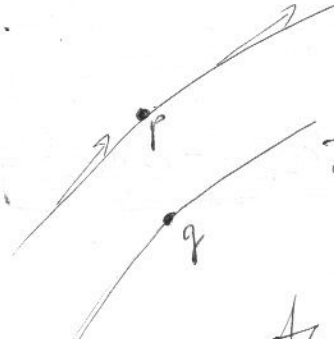
Def.: Legyen M tetsz. n dimenziós diffható sokaság. Ekkor azt mondjuk, hogy a C^r oszt. $\phi: \mathbb{R}\times M \to M$ leképezés egy egyparaméteres C^r-osztályú diffeomorfizmus csoportot határoz meg M en, ha

(1) $\forall$ rögzített $t \in \mathbb{R}$ ~~ean~~ -re ϕ nek a $\{t\}\times M$ sokaságra vett megszorítottja — melyet ezentúl $\phi_t: M \to M$ -mel jelöljük — az M differenciálható sokaság ~~önmagá~~ önmagára vett C^r oszt. diffeomorfizmusa

(2) továbbá, a $\{\phi_t\}$ leképezésekre $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ esetén a $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ relációk teljesülnek.

Lemma: ∀ egyparaméteres C^r oszt. diffeomorfizmus csoporthoz egyértelműen hozzárendelhető egy C^{r-1} oszt. vektormező

Biz: Legyen p tetsz. pontja M-nek, jelöljük a p pont $\{\Phi_t\}$ hez tart. pályáját $\{\Phi_t(p)\}$-vel.



$\{\Phi_t(p)\} \subset M$ görbe a p ponton keresztül

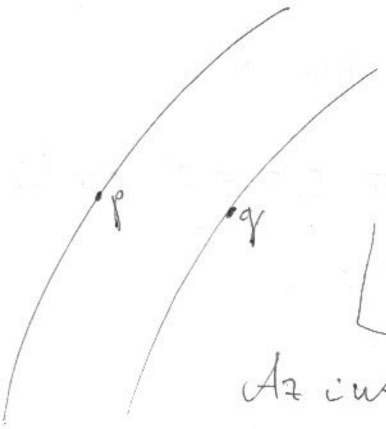
$\lambda = \lambda(t) \to \frac{dx^\alpha(t)}{dt} \to v^\alpha \in T(\mathcal{U})$

Az egyparaméteres diffeomorf. csop. definíciója miatt a különb. pályák nem metszhetik egymást.

$\Rightarrow \exists\ v^a \in T(M)$ C^{r-1} oszt. ú vektormező

Lemma: ∀ C^{r-1} oszt. v^a vektormezőhöz is egyértelműen ∃ egy lokális egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport, mely C^r oszt.

Biz:



„integrálgörbe” ∀ pontjában a v^a érintővektora az ilyen görbéknek

Legyen $(\mathcal{U}, \varphi)$ térkép és $v^a \in T(\mathcal{U})$ C^{r-1} oszt.

$$\boxed{\frac{dx^\alpha}{dt} = v^\alpha(x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad \text{és} \quad t_0,\ p = x^\alpha(t_0)} \ (0) \Rightarrow$$

Az integrálgörbék a fenti, elsőrendű, közönséges, diff. egy. tesznek eleget. Ennek a kezd.-ért. probl. ∀ ∃ egyért. m.o. ha a $v^\alpha(x(t))$ fv.-ek legalább C^1.

$\Rightarrow$ Integrálgörbék segítségével az M differenciálható sokaság $\forall$ pontja „leírható".

(4)

Áll.-nel.

$$(0) \Rightarrow \quad \boxed{X^{\alpha}(\phi_t(p)) = \underbrace{X^{\alpha}(t_0)}_{p} + \int_{t_0}^{t} v^{\alpha}\, dt}$$

azaz $\exists\ \phi_t : M \to M$ leképezés $p = X^{\alpha}(t_0) \longmapsto \phi_t(p) = X^{\alpha}(t)$ pontot rendeli hozzá. Az integrál mint a felsőhatár függvénye diffható ϕ_t lok. C^r osztályú, ha v^a C^{r-1}-osztályú.

$$\int_{t_0}^{t} = \int_{s}^{t} + \int_{t_0}^{s} \quad \Rightarrow \text{ szorzás művelete jól definiált.}$$

$$\phi_{\text{„}t+s\text{"}} = \phi_{\text{„}t\text{"}} \circ \phi_{\text{„}s\text{"}}$$

A két lemma értelmében a lokális egyparaméteres C^r osztályú diffeom.-csoportok és a C^{r-1} osztályú vektormezők kölcsönösen egyért. módon megfeleltethetők egymásnak.

nov. 30.

(1)

Def.: Legyen M tetsz. n-dimenziós diffható sokaság. Ekkor azt mondjuk, hogy a C^r-osztf. $\phi: [-\varepsilon, \varepsilon] \times M \to M$ Ált. rel. leképezés egy (lokális!) egyparaméteres C^r-oszt diffeomorfizmus csoportot határoz meg M-en be,

- $\forall$ rögz. .... $\mathbb{R}$ helyett $(-\varepsilon, \varepsilon)$
- továbbá a $\{\phi_t\}$ teljes. $\forall$ t, s, $s+t \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\mathbb{R}}$

Vektormezők kommutátorai

$v^a, w^a \in \mathcal{T}(M)$ tetsz. C^1-oszt. Legyen $f \in \mathcal{F}^{(2)}(M)$

$$\boxed{\begin{array}{l}[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) \\ \in \mathcal{T}(M)\end{array}}$$

$\exists$ ∇_a tetsz. torziómentes kov. diff. op. : v^a $v(f) = v^a \nabla_a f$

$$[v, w](f) = [v, w]^d \nabla_d f$$

$$[v, w](f) = \underbrace{v^c \nabla_c (w^d \nabla_d f)}_{v(w(f))} - w^c \nabla_c (v^d \nabla_d f) \overset{\text{Torziómentesség}}{=} (v^c \nabla_c w^d - w^c \nabla_c v^d)(\nabla_d f)$$

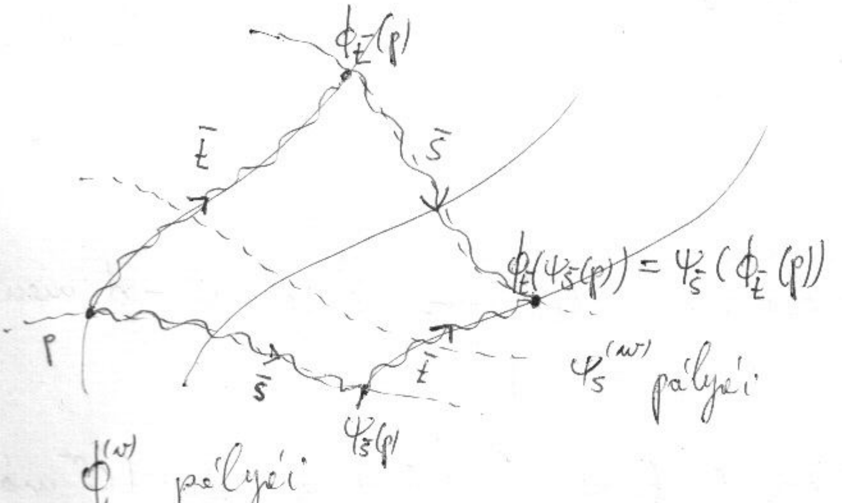
f tetsz. $\boxed{[v, w]^a = v^e \nabla_e w^a - w^e \nabla_e v^a}$ $(*)$

Hf.: Mutassuk meg, hogy $\forall$ v^a, w^a, z^a legalább kétszer differenciálható vektormezőre teljesül a Jacobi-azonosság: Általánosan

$$[[v,w],z]+[[z,v],w]+[[w,z],v]=0$$ relációt.

Tekintsük v^a és w^a vektormezőket M-en és tfh $[v,w]^a=0$

$$\begin{matrix} v^a & & w^a \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \phi_t^{(v)} & & \psi_s^{(w)} \end{matrix}$$ lok. egyparaméteres diffeomorfizmus csop.



Megmutatható, hogy $[v,w]=0 \iff \boxed{\psi_s^{(w)}\circ\phi_t^{(v)} = \phi_t^{(v)}\circ\psi_s^{(w)}}$

Spec. eset: $\exists$ $(\mathcal{O},\psi)$ térkép $(x^1,\dots,x^n)$ lokális koord.-kal

$\exists$ $v_{(\mu)}^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$ $\mu=1,\dots,n$ $\quad v_{(\mu)}^\alpha = \delta^\alpha_\mu$

∂_a torziómentes kov. deriv. operátor, $[v_{(\mu)}, v_{(\nu)}]=0$ $\forall \mu,\nu$-re

névindexek

Ha nem így lenne, nem lenne értelme a koordinátázásoknak.

Lemma: Tekintsük a $\{v_{(1)}^a, \dots, v_{(n)}^a\}$ lin. ftlen, legalább egyszer diffható vektormezők egy rendszerét. Ekkor $\forall p \in M$ pont valamely O_p nyílt környezetében pontosan akkor léteznek olyan legalább C^2 osztályú $(x^1, \dots, x^n)$ lok. koord., melyekre $v_{(\mu)}^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$ tetsz. $\mu \in \{1, \dots, n\}$ értékekre, ha a $[v_{(\mu)}, v_{(\nu)}]^a$ kommutátorok a μ és ν indexek tetszőleges választása esetén zérus értéket vesznek fel.

Frobenius-tétele:

M n-dim. diffható sokaság $\tau(p) \longrightarrow \hat{\tau}(p)$ $\hat{n}$-dimenziós
$(p \in M)$

altér ($\hat{n} < n$). Feltesszük, hogy $\{\hat{\tau}(p)\}$ simán (C^r módon) illeszkednek, abban az értelemben, hogy ezeket a $\tau(M)$-ből vett C^r oszt. vektormezők feszítik ki.

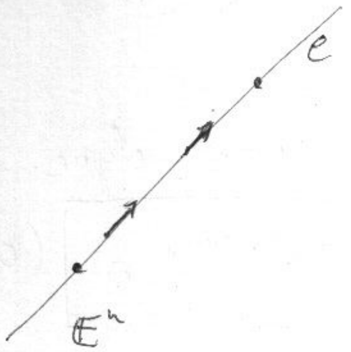
$\exists$ $\{\hat{M}\}$ $\hat{n}$-dim diffható sokaságok úgy, hogy $\forall$ $p \in M$ ponthoz található olyan $\hat{M}$ $\hat{n}$ dim diff. sok., hogy $\tau(\hat{M})\Big|_p = \hat{\tau}(M)\Big|_p$

Kérdés: Hogyan kell megválasztani a $\{\hat{\tau}(p)\}$ rendszert ($\hat{n}$-dim alterek halmaza) úgy, hogy létezzen az $\{\hat{M}\}$ diff. sokaságok rendszere

<u>Tétel</u> (Frobenius) A $T(M)$ beli $0<\hat{n}<n$ dimenziós alterek egy $\hat{\tau}(M) = \{\hat{\tau}(p)\}$ rendszeréhez pontosan akkor (Ált.nál.) találhatók a fentebbi értelemben meghatározott (Euklides) ~~integrál~~ $\hat{n}$-dimenziós $\hat{M}$ integrálsokaságok, ha a $\hat{\tau}(M)$ rendszerhez tartozó tetszőleges $\hat{V}^a$ és $\hat{W}^a$ vekt.m. esetén a $[\hat{V},\hat{W}]^a$ kommutátora is mindig a $\hat{\tau}(M)$ rendszerhez tartozik.

"<u>Def</u>": Az $\hat{M}$ $\hat{n}$-dimenziós diffható sokaságokat szokás integrál sokaságoknak is nevezni.

Az önmagukkal párhuzamos görbék



(1) ∀ két pontja között a legrövidebb.

(2) ∀ pontjában vett érintővektorának ∥ eltoltja is érinti e-t

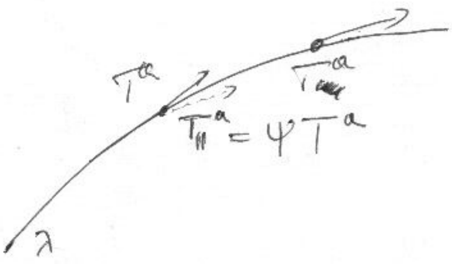
(1) Metrikus tulajdonság

(2) Affin tulajdonság

<u>Def.</u>: Legyen $\lambda(t)$ egy legalább C^2-osztályú görbe M-ben. Akkor $\lambda(t)$ valamely ∇_a KDO-ra nézve önmagával ∥ görbének nevezik, ha ∃ olyan φ fv, hogy a $\lambda(t)$ T^a érintővektorára a

$$(\square) \quad \boxed{T^e \nabla_e T^a = \varphi T^a} \quad \lambda \text{ mentén.}$$

Megj.: $T^e \nabla_e T^a = \lim\limits_{t \to 0} \frac{T_{\parallel} - T}{t}$



„$\lambda(t)$" $t' = t'(t)$ szig. mon. fv.

$\Downarrow$

$$\phi = \frac{dt'}{dt}$$

ha $\exists$ t paraméter, helyettesítő t' $\quad T^a = T'^a \frac{dt'}{dt} = \left(T^\alpha = \frac{dx^\alpha(t)}{dt} \quad T'^\alpha = \frac{dx^\alpha(t)}{dt'} \right) =$

$= T'^a \phi$

Cél: Megmutatni, hogy mindig $\exists$ olyan t' paraméter amelyre egy önmagával $\parallel$ görbe egyenlete $\boxed{T^e \nabla_e T^a = 0}$ (0) alakú

(□), $T^a = \phi T'^a$

$\phi T'^e \nabla_e (\phi T'^a) = \psi \phi T'^a$ $\quad$ Leibnitz-szabályból $\Rightarrow$

$$\phi^2 T'^e \nabla_e T'^a + \left[T^e \nabla_e \phi - \psi \phi \right] T'^a = 0$$

$(\mathcal{M}, \varphi)$ térkép $(x^1, \dots, x^4)$ lok. koord.

$$T^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \quad T^e \nabla_e \phi = \frac{dx^\varepsilon}{dt} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\varepsilon} = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2 t'}{dt^2} - \varphi \frac{dt'}{dt} = 0}$$

$$\boxed{t' = a \int_0^t e^{\int_0^{\tilde t} \varphi \, d\hat t} \, d\tilde t + b}$$

, azaz ha φ legalább integrálható, akkor mindig bevezethető a kívánt tulajdonságú param., melyet affin paraméternek nev.

$\boxed{a \neq 0 \text{ és } b \in \mathbb{R}}$

t már affin, akkor $\forall\ t' = at + b$ is az.

Legyen $(\mathcal{M}, \varphi)$ térkép $(x^1, \dots, x^4)$ lok. koord. akkor (0) a

$$\underbrace{T^e \partial_e T^a}_{\left(\frac{dx^\varepsilon}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\varepsilon}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}} + \Gamma^a_{ef} T^e T^f = 0 \qquad \left(\text{láttuk: } \nabla_e T^a = \partial_e T^a + \Gamma^a_{ef} T^f\right)$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\varepsilon\varphi} \frac{dx^\varepsilon}{dt} \frac{dx^\varphi}{dt} = 0.} \quad \text{és} \quad \boxed{x^\alpha(p), \left.\frac{dx^\alpha}{dt}\right|_p}$$

C^{∞}

ebben a kezd.ért. problémához mindig létezik egyért. m.o. (lokálisan)

$\Rightarrow$ Egy diff. sokaság $\forall$ pontjából $\forall$ érintővektorával tudok indítani egy önmagával $\parallel$ görbét.

Geodetikusok.

Def.: Legyen g_{ab} Riemann-metrika M-en. Ekkor a $\lambda : J \subset \mathbb{R} \to M$ legalább C^1 oszt. görbe $t=\alpha$ és $t=\beta$ paramétereke által meghatározott $p=\lambda(\alpha)$ és $q=\lambda(\beta)$ pontjai közé eső szakaszának ívhosszán az

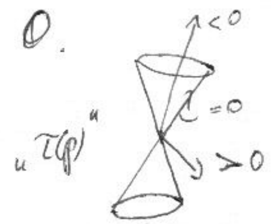
$$l_{[p,q]} := \int_{\alpha}^{\beta} (g_{ef}T^eT^f)^{1/2}\,dt$$

integrál által meghatározott számot értjük, ahol T^a a λ görbe t paraméterhez tartozó érintővektorát jelöli.

$t' = t'(t)$ $\qquad \frac{dt'}{dt}T'^a = T^a$

$$l_{[p,q]}(t') = \int_{t'(\alpha)}^{t'(\beta)} (g_{ef}T'^eT'^f)^{1/2}\,dt' = l_{[p,q]}(t)$$

Def.: Legyen g_{ab} $(-,+,\dots+)$ signatúrájú Lorentz-metrika M-en, valamint $p \in M$ tetsz. pont. Ekkor valamely $V^a \in T(p)$ vektort időszerűnek, fényszerűnek, térszerűnek nevezzük annak megfelelően, hogy a $g_{ab}V^aV^b$ belső-szorzat kisebb, egyenlő, nagyobb mint 0.



Def.: A $\lambda: J \subset \mathbb{R} \to M$ legalább C^1 oszt. görbét időszerűnek, fényszerűnek vagy térszerűnek nevezzük, ha λ T^a érintővektora λ mentén mindenütt időszerű, fényszerű vagy térszerű

Legyen ∇_a a metrikával kompatibilis KDO. $\nabla_a g_{bc} = 0$.
Ekkor bármely önmagával párhuzamos görbe kauzális karaktere állandó.

$$T^f \nabla_f (T^e T_e) = T^f \nabla_f (g_{ab} T^a T^b) =$$

$$= 2 \underbrace{(T^f \nabla_f T^a)}_{=0} T_a = 0$$

Def.: Legyen g_{ab} $(-,+,+,+)$ szignatúrájú Lorentz metrika M-en. Ekkor $\lambda: J \subset \mathbb{R} \to M$ legalább C^1 oszt. ~~módon~~ görbe $t = \alpha$ és $t = \beta$ paraméterek által meghatározott $p = \lambda(\alpha)$ és $q = \lambda(\beta)$ pontjai közé eső szakaszának ívhosszán az

$$l_{[p,q]} := \int_\alpha^\beta (\varepsilon g_{ef} T^e T^f)^{1/2} dt$$

int. által meghat. számot értjük, ahol T^a a λ görbe t par.-hez tart. érintővekt. jelöli, továbbá $\varepsilon = -1, 0, +1$ annak megfelelően, hogy λ időszerű, fényszerű, térszerű.

Def.: Az idősszerű görbék ~~mente~~ ívhossz paraméterét, azaz azt a $\tau = \tau(t)$ fv.-t, amelyet a

$$\tau(t) = \underset{\in \mathbb{R}}{\tau(\alpha)} + \int_{\alpha}^{t} \left(-g_{ef} T^{e} T^{f}\right)^{1/2} dt$$

formulával definiálunk, a λ görbe sajátidő paraméterének nevezzük.

A sajátidő paraméter mindig egy egységnyi érintővektorral rendelkező idősszerű görbe ívhosszával esik egybe.