Hidrodinamikai megközelítés

Magreakciók alacsony energiától nagy energiáig

Lökös Sándor

Házi védés, 2013. október 22.

Áttekintés

- Megmaradások a hidrodinamikai leírásban
- A szabad úthossz szerepe a leírás érvényességében
- Kvantummechanika, mint analogon
- Az időfüggő Hartree–Fock-eset
- Relativisztikus eset
- Egy dimenziós „shock” modell
- Összefoglalás, átvezetés a következő előadásra

Megmaradások a hidrodinamikai leírásban

- Transzport egyenletet szeretnénk f eloszlásfüggvényre
- VUU egyenlet alapján felírhatjuk:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{coll} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$$

- Integráljuk p-re!
- Parciális integrálással a külső erőt tartalmazó tag eltűnik

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = \int d^3p \left(\frac{df}{dt}\right)_{coll}$$

- Míg a részecskeszám megmarad a teljes impulzustérre vett integrál zérus kell legyen $\rightarrow$ Kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{u} = 0$$

Megmaradások a hidrodinamikai leírásban

- Írjuk fel az impulzussűrűségre is a megmaradást!
- VUU egyenletet integráljuk $\mathbf{v}$ súllyal

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \int d^3p\mathbf{v}\ \mathbf{v}f + \sum_j F_j \int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial p_j} d^3p = 0$$

- Ahogy az előbb is, a külső erőt tartalmazó tag kiesik,

$$\int d^3p\mathbf{v}\ \mathbf{v}f = \int d^3p\mathbf{u}\ \mathbf{u}f + \int d^3p(\mathbf{v}-\mathbf{u})(\mathbf{u}-\mathbf{v})f + \int d^3p\mathbf{u}(\mathbf{v}-\mathbf{u})f + \int d^3p(\mathbf{v}-\mathbf{u})\mathbf{u}f$$

- A $(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ átlaga nulla, így az utolsó két tag eldobható
- A maradék definiálja a kinetikus feszültségtenzort:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \int d^3p(\mathbf{v}-\mathbf{u})(\mathbf{u}-\mathbf{v})f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$$

S így felírható az impulzus megmaradására vonatkozó egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla\mathbf{P} + \frac{\rho}{m}\mathbf{F}$$

Megmaradások a hidrodinamikai leírásban

- Ha az energiasűrűséget a

$$\rho E = \frac{m}{2} \int d^3 p v^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

- Bevezetve az átlagos sebességet, felbontható

$$\rho E = \frac{m}{2} \rho u^2 + \frac{m}{2} \int d^3 p (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

- Kiintegrálva a VUU egyenletet $\frac{mv^2}{2}$ súllyal, hasonló számolásokat elvégezve, mint az előbb, adódik, hogy az energiamegmaradás:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla(\rho E \mathbf{u}) = -\nabla(\mathbf{u}\mathbf{P}) + \rho \mathbf{u}\mathbf{F}$$

- Végig lokális egyensúlyt feltételeztünk!

A szabad úthossz szerepe a leírás érvényességében

- Alkalmazhatósághoz fel kell tenni, nagyon gyorsan újra egyensúlyba kerül és termalizálódik a közeg
- Ez akkor áll fent, ha az átlagos szabad úthossz kisebb, mint a rendszer tipikus mérete

$$\frac{\lambda}{L} << 1$$

  ahol a λ szabad úthosszt a

$$\lambda = \frac{1}{\sigma\rho}$$

  összefüggés definiálja. A σ a teljes nukleon-nukleon szórási hatáskeresztmetszet, a ρ pedig a nukleáris sűrűség.
- Példa: $E_{lab} > 200 MeV/n \rightarrow \lambda \approx 2fm$ ami nem túl kicsi a tipikus $10fm$-s mérethez képest

Kvantummechanika, mint analogon

- Formális analógia a hidrodinamika és a kvantummechanika között

$$-\frac{\hbar^2\triangle}{2m}\Psi + V(r)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

- Szeparálva a fázist:

$$\Psi(r,t) = \phi(r,t)e^{\frac{i}{\hbar}mS(r,t)}$$

- Ezt beírva és a komplex konjugálttal szorozva az egyenletet a valós része

$$\frac{m}{2}\phi(\nabla S)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + V\phi = -m\phi\frac{\partial S}{\partial t}$$

- A képzetes része

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \nabla(\phi^2\nabla S) = 0$$

Kvantummechanika, mint analogon

- Definiálhatjuk a *valószínűség sűrűséget* és a *valószínűségi áramot*

$$\rho(r,t) = \phi^2(r,t)$$
$$j(r,t) = \phi^2(r,t)\nabla S(r,t)$$

ami átírható $j(r,t) = \frac{\hbar}{2im}\left[\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right]$

- Átírva a valós részt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\phi^2\nabla S) + \nabla(m\phi^2\nabla S\nabla S) = -\phi^2\nabla V + \phi^2\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi\nabla^2\phi}{\phi^2}\right)$$

- ami a ρ és a v definíciójával

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho z) + \nabla(m\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\rho\nabla\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\sqrt{\rho}\nabla^2\sqrt{\rho}}{\rho}\right)$$

Kvantummechanika, mint analogon

- Impulzusmegmaradás egy extra taggal, ami a fluktuációk miatti belső nyomásként is értelmezhető
- A fenti egyenlet egyrészecske valószínűségsűrűségét írja le
- Kvantumos soktest rendszer úgy viselkedik, mint egy kölcsönható folyadék
- A fenti sebesség és sűrűség definíciója nehézkes soktest rendszerre
- Fontos kérdés, hogy leírhatók-e a mikroszkópikus tulajdonságok, mint a makroszkópikus változók függvényei vagy sem

Az időfüggő Hartree–Fock-eset (TDHF)

- Soktest rendszerre akarunk kontinuitási egyenletet
- A TDHF egyenletből vezetjük le a hosszasabb számolás helyett

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_\alpha(r,t) + \Psi_\alpha(r,t)\int d^3r' V(r-r')\sum_\beta \Psi^*_\beta(r',t)\Psi_\beta(r',t) - \sum_\beta \Psi_\beta(r,t)\int d^3r' V(r-r')\Psi^*_\beta(r',t)\Psi_\alpha(r',t)$$

- Ψ_α egyrészecske hullámfüggvény, $V(r-r')$ a két részecske kölcsönhatása
- Kihasználva az analógiát, definiálhatjuk a sokrészecske sűrűséget és áramsűrűséget

$$\rho(r,t) = \sum_\alpha \Psi^*_\alpha(r,t)\Psi_\alpha(r,t) = \sum_\alpha \phi^2_\alpha(r,t)$$

$$j(r,t) = \sum j_\alpha(r,t) = \sum \phi^2_\alpha(r,t)\nabla S_\alpha(r,t)$$

Az időfüggő Hartree–Fock-eset (TDHF)

- Szeparálva a hullámfüggvényt, mint feljebb: $\Psi_\alpha(r,t) = \phi_\alpha(r,t)e^{\frac{im}{\hbar}S_\alpha(r,t)}$
- Mint az előbb, legyen a kollektív sebesség:

$$v(r,t) = \frac{j(r,t)}{\rho(r,t)} = \frac{\sum_\alpha \phi_\alpha^2(r,t)\nabla S(r,t)}{\sum_\alpha \phi_\alpha^2(r,t)} = \frac{\sum_\alpha \rho_\alpha v_\alpha}{\sum_\alpha \rho_\alpha}$$

- Így az impulzusra vonatkozó egyenlet teljesen analóg módon írható:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial j(r,t)}{\partial t} + \nabla \sum_\alpha (\phi_\alpha^2 \nabla S_\alpha \nabla S_\alpha) = \\
&= -\frac{1}{m}\sum_\alpha \phi_\alpha^2 \nabla \left[\frac{\phi_\alpha(-(\hbar^2/2m)\nabla^2)\phi_\alpha}{\alpha^2}\right] - \\
&- \frac{\rho}{m}\nabla \int d^3r' V(r-r')\rho(r') + \\
&+ \frac{\rho}{m}\nabla \int d^3r' V(r-r') \left|\sum_\alpha \Psi_\alpha^*(r)\Psi_\alpha^*(r')\right| \qquad (1)
\end{aligned}$$

Az időfüggő Hartree–Fock-eset (TDHF)

- Dinamika leírására egyszerűbbet szeretnénk
- Minden egyrészecske állapotot a ρ, j és T mezőkkel kifejezni

$$\nabla \sum_{\alpha} (\phi_\alpha^2 \nabla S_\alpha \nabla S_\alpha) =$$

$$= \nabla \left(\rho \mathbf{v}\ \mathbf{v} + \sum_{\alpha} \phi_\alpha^2 (\nabla S_\alpha - \mathbf{v})(\nabla S_\alpha - \mathbf{v}) \right) =$$

$$= \nabla \left(\rho \mathbf{v}\ \mathbf{v} + \frac{1}{m} \mathbf{P} \right)$$

- ahol, a kinetikus elmélethez hasonlóan, definiáltuk a **P** tenzort

Az időfüggő Hartree–Fock-eset (TDHF)

- A potenciál egyszerűsítésére a n-n kölcsönhatást két részre bontjuk:
  - V_s rövid hatótávú, ez függ a sűrűségtől
  - V_l hosszú hatótávú

$$V(r-r') = V_s(\rho(r))\delta(r,r') + V_l(r-r')$$

- A (1) egyenletben a potenciálos tag így

$$\int d^3r' V(r-r')\rho(r') = V_s[\rho(r)]\rho(r) + U_l(r)$$

- A következő tagot pedig átírhatjuk

$$\frac{1}{m}\int d^3r' \nabla V(r-r') \left|\sum_\alpha \Psi^*_\alpha(r)\Psi_\alpha(r')\right|^2 = -\frac{\rho}{m}\nabla\frac{\partial}{\partial\rho}W_x(\rho) + F_{Cx}$$

Relativisztikus eset

- Nyilván nem élesen definiált a határ a relativisztikus és a klasszikus tárgyalhatóság között, mégis az $E_{lab} < 500 MeV/n$ bombázó energia és a közel fénysebességű relatív sebesség már eléggé indokolttá teszi a relativisztikus leírást
- Két eset lehetséges a relativisztikussá válásra:
  - A tágulási sebesség relativisztikus (makroszkópikusan) Leírása: a mozgásegyenletben
  - A „belső” energia relativisztikus (mikroszkópikusan) Leírása: az állapotegyenletben
- A relativisztikus mozgásegyenletek is tükröznek megmaradásokat:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho_L + \partial_k(\rho_L v_k) &= 0 \quad \text{barionszám} \\
\partial_t \mathbf{M}_i + \partial_k(\mathbf{M}_i v_k) &= -\partial_i P \quad \text{impulzus} \\
\partial_t e_L + \partial_k(e_L v_k) &= -\partial_k(P v_k) \quad \text{energia}
\end{aligned}
$$

Egy dimenziós lökéshullám („shock”) modell

- Lökéshullám $\neq$ hanghullám
- Sűrűségfüggő anyaghullám amely v_{flow} sebességgel terjed
- A shock front $v_{shock} > v_{flow}$ sebességgel terjed, amely szintén erősen nyomástól
- Jó közelítéssel egy elhanyagolható vastagságú réteg (1-2 fm-re kenődhet szét a viszkozitás miatt)
- Ezen a felületen ugranak a termodinamikai mennyiségek

Egy dimenziós lökéshullám („shock”) modell

- Relativisztikus egyenletek vezethetők le a kontinuitásokból:

$$\text{részecske sűrűség}: [j^0] = [\rho u_x] = 0$$
$$\text{energia sűrűség}: [T_{0x}] = [i u_0 u_x] = 0$$
$$\text{impulzus sűrűsg}: [T_{xx}] = [i u_x^2 + P] = 0$$

- [] jelöli a mennyiségek ugrását, ahogy shockon keresztül haladnak
- x adja a normális irányát a shock nyugalmi rendszeréből
- u_x-et eliminálva kapjuk a relativisztikus shock egyenletet:

$$\frac{i_0^2}{\rho_0^2} - \frac{i^2}{\rho^2} + (P - P_0)\left(\frac{i_0}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho^2}\right) = 0$$

- ahol az i a szabad entalpia, P a nyomás, ρ a sűrűség a nyugalmi rendszerben

Egy dimenziós lökéshullám („shock”) modell

- Ha $i = \rho W + P$ és $i_0 = \rho_0 W_0$ helyettesítéssel élünk

$$W^2 - W_0^2 + P(W/\rho - W_0/\rho_0) = 0$$

- Ez a Rankine–Hugoniot egyenlet
- Itt a $W(p, T)$ az energia/nukleon, amely így az állapotegyenletet jellemzi

Összefoglalás, átvezetés a következő előadásra

- Mindenképpen igaz, hogy a fenomenológiai leíráshoz szükséges egy állapotegyenlet
- Legáltalánosabban is szükséges kapcsolat a termodinamikai mennyiségek között, ha meg akarjuk az egyenleteket oldani
- Makroszkopikus mennyiségek érdekelnek, mint a nyomás, hőmérséklet, stb.
- A hidrodinamikai leírás alkalmas a termodinamikai mennyiségek közötti összefüggések tárgyalására, de szükséges az állapotegyenlet